ABHANDLUNGEN DES 1. GEOGRAPHISCHEN INSTITUTS
DER FREIEN UNIVERSITÄT BERLIN

(Neue Folge der Abhandlungen des Geographischen Instituts
der Freien Universität Berlin)

herausgegeben von

J. H. SCHULTZE

BAND 10

ZUR GEOMETRIE VON VERKEHRSNETZEN

Die Beziehung zwischen räumlicher Netzgestaltung und Wirtschaftlichkeit

VON

CHRISTIAN WERNER

Mit 44 Figuren · English Summary

Berlin

1966

VERLAG VON DIETRICH REIMER IN BERLIN

ZUR GEOMETRIE VON VERKEHRSNETZEN

Die Beziehung zwischen räumlicher Netzgestaltung und Wirtschaftlichkeit

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Christian Werner
Hamburg

Erster Gutachter: Prof. Dr. Dr. J. H. Schultze
Zweiter Gutachter: Prof. Dr. K. P. Grotemeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1965
Tag der Promotion: 18. FEB 1966

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Gedruckt mit Unterstützung der Stiftung Volkswagenwerk
und der Freien Universität Berlin

© Dietrich Reimer · Andrews & Steiner · Berlin
Alle Rechte vorbehalten

D 188

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Vorwort ... 9

1. Einleitung ... 11
   11. Abgrenzung des Themas ... 11
   12. Der zweidimensionale homogene Verkehrsraum ... 12
      121. Einschränkung in der Sache ... 13
      122. Einschränkung als Methode ... 16
   13. Die Mathematik als Hilfswissenschaft in der Verkehrsgeographie ... 17
   14. Das Verkehrsnetz ... 19
      141. Beschreibung ... 19
      142. Beispiele von Netzproblemen ... 21
      143. Definitionen ... 21

2. Der Verkehr als ökonomisches Problem ... 24
   21. Verkehrsursache, Verkehrsspannung ... 24
   22. Verkehrswiderstand, Arbeitsaufwand ... 25
   23. Die Kostenrechnung ... 27
   24. Das Prinzip der Verkehrsbündelung ... 28
   25. Verkehrsbündelung und Verkehrsnetz ... 30

3. Zur Geschichte der Theorie der Verkehrsnetze ... 33

4. Die Gestaltung von Verkehrsnetzen im homogenen Raum ... 40
   41. Vorbemerkungen ... 40
   42. Das 3-Punkte-Problem mit 2 Verkehrsspannungen ... 40
      421. Untersuchung der Kostenfunktion ... 42
      422. Geometrische Konstruktion der Y-Lösung ... 48
   43. Vier Quellpunkte mit zwei Verkehrsspannungen ... 51
   44. Das 3-Punkte-Problem mit 3 Verkehrsspannungen ... 56
      441. Topologische Typen der Lösung ... 59
      442. Die Interdependenz von topologischem Typus und gegebenen Winkelrelationen ... 61
      443. Graphische Konstruktion der Lösung ... 63
      444. Der Launhardt'sche Satz vom Knotenpunkt: Kritik, Beispiele ... 64
   45. Spannungsfelder und Netze höherer Ordnung ... 73
   46. Zur Struktur der Netztopologie ... 78

5. Erweiterung von Verkehrsnetzen im homogenen Raum ... 81
   51. Verbindung eines Quellpunktes mit einer Verkehrsstrecke ... 81
   52. Verbindung zweier Quellpunkte unter Einschluß einer bestehenden Verkehrsstrecke ... 85
   53. Optimale Linienführung bei gegebenem Verkehrsnetz ... 90
      531. Aufstellung der Kostenfunktion ... 92
      532. Zerlegung des Problems in seine Einzelteile ... 94

Seite

533. Ein Beispiel ... 97
534. Eine zweidimensionale Abschätzung für die gesuchte Linienführung 99
54. Neukonstruktionen bei gleichzeitiger Vergrößerung der Kapazitäten .. 101

6. Linienführung in der geographischen Ebene ... 106
61. Vorbemerkungen ... 106
62. Problemstellung ... 106
63. Definitionen, Entwicklung der Kostenfunktion ... 107
64. Zerlegung des allgemeinen Problems ... 110
641. Extremwertuntersuchung für das simplifizierte Problem ... 111
642. Approximation der notwendigen Minimalbedingungen ... 113
643. Zerlegung des simplifizierten Problems ... 114
644. Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für die Partiallösung ... 117
65. Die Lösung des allgemeinen Problems ... 121
66. Praktische Konstruktion der Lösung ... 122

7. Zusammenfassung, Schlußbetrachtung ... 128

8. Summary ... 131

9. Literaturverzeichnis ... 134

VERZEICHNIS DER FIGUREN

1.1 (S. 15): Skizze des Eisenbahnnetzes im südöstlichen Rumänien. Vergleich zwischen Luftlinien- und Bahnkilometer-Entfernungen. Erläuterung S. 14.

2.1 (S. 29): Die erste Eisenbahnverbindung von Magdeburg und Leipzig nach Berlin. Erläuterung S. 29.

2.2 (S. 31): Skizze des Eisenbahnnetzes von Südwest-Afrika. Erläuterung S. 32.

4.1 (S. 41): Vier Lösungsbeispiele für das elementare Verkehrsnetzproblem zweier Verkehrsspannungen zwischen drei Verkehrsquellen. Erläuterung S. 40–41.

4.2 (S. 42): Darstellung des Netzproblems zweier Verkehrsspannungen zwischen drei Verkehrsquellen im cartesischen Koordinatensystem zur Aufstellung der Kostenfunktion. Erläuterung S. 42–44.

4.3 (S. 45): Graphische Konstruktion der optimalen Winkel zwischen den Gabelästen. Erläuterung S. 44–45.

4.4 (S. 48): Graphische Konstruktion der optimalen Lage des Gabelpunktes im Netzproblem zweier Verkehrsspannungen zwischen drei Verkehrsquellen. Erläuterung S. 48–49.

4.4a (S. 50): Beispiel für die irreale Lösung: Der auf graphischem Wege konstruierte Gabelpunkt liegt außerhalb des durch die drei Quellpunkte definierten Dreiecks. Erläuterung S. 49–51.

4.5 (S. 52): Verkehrsnetz zwischen vier Quellpunkten mit zwei Verkehrsspannungen. Erläuterung S. 51.

4.6 (S. 54): Graphische Konstruktion des optimalen Verkehrsnetzes für das Netzproblem zweier Verkehrsspannungen zwischen vier Quellpunkten. Erläuterung S. 52–53.

4.7 (S. 54): Vier Lösungsbeispiele des Netzproblems zweier Verkehrsspannungen zwischen vier Quellpunkten. Erläuterung S. 51–53.

4.8 (S. 55): Die zwei topologisch verschiedenen Lösungen im Netzproblem zweier sich überschneidender Verkehrsspannungen zwischen vier Quellpunkten. Graphische Konstruktion der optimalen Winkel zwischen den Gabelästen. Erläuterung S. 44–45 und 53–54.

4.9 (S. 57): Lösung des Netzproblems dreier Verkehrsspannungen zwischen drei Verkehrsquellen mittels graphischer Iteration. Erläuterung S. 56.

4.10 (S. 58): Allgemeine Netzgestalt für das Problem dreier Verkehrsspannungen zwischen drei Verkehrsquellen. Erläuterung S. 56.

4.11 (S. 60): Entwicklung der verschiedenen topologischen Netzgestalten für das Problem dreier Verkehrsspannungen zwischen drei Quellpunkten. Erläuterung S. 59.

4.12 (S. 60): Tabellarische Zusammenstellung der verschiedenen Ausprägungen der einzelnen topologischen Netztypen. Erläuterung S. 59.

4.13 (S. 63): Die funktionale Abhängigkeit zwischen Winkelrelationen und optimalen Netztypen. Erläuterung S. 61–63.

4.13a (S. 66): Die beiden Launhardtschen Lösungen für das Netzproblem dreier Verkehrsspannungen zwischen drei Quellpunkten und einige Alternativ-Lösungen bei Kostengleichheit. Erläuterung S. 64–66.

4.13b (S. 66): Die beiden Launhardtschen Lösungen als Sonderfälle der Lösungsmannigfaltigkeit: Skizze zur Beweisführung. Erläuterung S. 66–67.

4.13c (S. 68): Beispiel und Gegenbeispiel zu Launhardts Formel für die Grenzverkehrsbelastung. Erläuterung S. 67–69.

4.13d (S. 70): Erste Skizze zu einem konkreten Beispiel eines Netzproblems dreier Verkehrsspannungen zwischen drei Quellpunkten. Erläuterung S. 69–70.

4.13e (S. 72): Die optimalen Lösungen dreier topologisch verschiedener Netztypen in einem konkreten Drei-Punkte-Problem. Erläuterung S. 67–73.

4.14 (S. 74): Repräsentantenmenge aller möglichen Spannungsfelder zwischen vier Punkten. Erläuterung S. 73.

4.15 (S. 75): Repräsentanten zweier Spannungsfelder und die Mannigfaltigkeit ihrer verschiedenen Ausprägungen. Erläuterung S. 73.

4.16 (S. 75): Zwei Spannungsfelder mit verschiedenen Beispielen möglicher Netzlösungen. Erläuterung S. 73.

4.17 (S. 77): Das Vier-Punkte-Problem: (a) Die beiden baukostenmäßig optimalen Lösungen, (b) Die betriebskostenmäßig optimale Lösung, (c) Zwei allgemeine Netzmodelle. Erläuterung S. 76.

4.18 (S. 77): Vorschlag zur Überwindung des Problems der topologischen Äquivalenzklassen. Erläuterung S. 76–78.

4.19 (S. 79): Zerlegung eines Knotenpunktes in ein System von Gabelpunkten. Erläuterung S. 78–80.

4.20 (S. 80): Skizze des Eisenbahnnetzes zwischen Madrid und den Haupthäfen der Südost- und Südküste Spaniens. Erläuterung S. 80.

5.1 (S. 82): Das Problem der Verbindung einer Verkehrsquelle mit einer bestehenden Verkehrsstrecke, dargestellt im cartesischen Koordinatensystem. Erläuterung S. 81.

5.2 (S. 85): Verbindung einer Verkehrsquelle mit einer Verkehrsstrecke: Optimale Linienführung und einige Alternativ-Lösungen. Erläuterung S. 84.

5.3 (S. 85): Verbindungen zweier Quellpunkte unter Einschluß einer bestehenden Verkehrsstrecke. Erläuterung S. 85–86.

5.4 (S. 88): Skizze zu dem Sonderfall, daß die Kostenfunktion ihr Minimum auf dem Rande des Definitionsbereiches annimmt. Erläuterung S. 87–88.

5.5 (S. 89): Verbindung zweier Quellpunkte unter Einschluß einer abseits gelegenen Verkehrsstrecke. Erläuterung S. 89–90.

5.6 (S. 91): Skizze zur Erweiterung eines bestehenden Verkehrsnetzes zwecks Befriedigung einer neu hinzugekommenen Verkehrsspannung. Erläuterung S. 90–92.

5.7 (S. 95): Konstruktion neuer Netzglieder zwecks optimaler Verbindung bereits bestehender. Erläuterung S. 94–95.

5.8 (S. 96): Konstruktion einer optimalen Netzerweiterung. Demonstration anhand eines konkreten Beispiels. Erläuterung S. 94–99.

5.9 (S. 104): Netzerweiterung: Abschätzungsellipse zur Bestimmung des Areals, in welchem die optimale Lösung zu suchen ist. Erläuterung S. 99–100 und 103–104.

6.1 (S. 109): Grenzlinien gleicher Baukosten, durch Polygonzüge approximiert. Erläuterung S. 109–110.

6.2 (S. 112): Richtungsänderungen der Trasse im Gebiet unterschiedlicher Baukosten: Geometrische Fixierung im cartesischen Koordinatensystem. Erläuterung S. 111–113.

6.3 (S. 115): Skizze eines Trassenausschnitts zur Untersuchung der Kostenfunktion. Erläuterung S. 115–117.

6.4 (S. 119): Gleichsinniger und gegensinniger Verlauf zweier grenzüberschreitender Trassen. Erläuterung S. 119.

6.5 (S. 124): Instrument zur Messung des Quotienten der Kosinus von Ein- und Austrittswinkel einer grenzüberschreitenden Trasse. Erläuterung S. 125.

6.6 (S. 126): Beispiel für ökonomisch optimale Trassierung in der inhomogenen Verkehrsebene. Erläuterung S. 125.

VORWORT

Es ist unmittelbar einsichtig, daß die Gesamtkosten des Verkehrs – also die Summe von Bau-, Instandhaltungs- und Verkehrsbetriebskosten – von der Gestalt des betreffenden Verkehrsnetzes abhängen. Jedoch ist beispielsweise die Feststellung, daß ein weitmaschiges Netz relativ billig zu bauen ist, dem Verkehr aber eventuell große Umwege und damit relativ hohe Betriebskosten zumutet, viel zu unscharf, als daß sich die Angewandte Verkehrsgeographie mit ihr begnügen dürfte.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, aus gegebenen quantitativen Voraussetzungen wie Verkehrsspannung, kilometrische Bau- bzw. Betriebskosten u. a., diejenige Netzgestalt abzuleiten, die vom Gesichtspunkt der Gesamtkostenrechnung her ein optimales Ergebnis liefert.

Die bisherigen Publikationen auf dem Gebiet der Verkehrsgeographie gehen fast immer von einer Gliederung des Verkehrs nach Verkehrsarten, -mitteln und -medien aus, um diese dann einzeln abzuhandeln. Eine der wesentlichen Konzeptionen der vorliegenden Arbeit besteht darin, daß sie nur Aussagen über die Verkehrserscheinungen schlechthin macht und die verschiedenen Verkehrstypen immer nur beispielhaft einblendet.

Die Arbeit geht in hohem Maße abstrahierend und deduktiv vor. Im Bereich der Verkehrsgeographie hat sich für Studien dieser Art noch keine kontinuierliche Tradition entwickelt, die ihren Platz im Gesamtgebiet der Wissenschaft eingeordnet und fixiert hätte. Deshalb wurde den eigentlichen Untersuchungen eine ausführliche Erörterung über Abgrenzung, Methode und Ziel der Arbeit vorangestellt, die über den üblichen Rahmen hinausgeht.

Die mathematischen Ausführungen sind nicht Selbstzweck, sondern angewandter Natur. Sie verzichten deshalb bisweilen auf Vollständigkeit. So werden etwa Aussagen, die sich aus der Art des Problems als evident ergeben, nicht bewiesen, Konsequenzen, die für das Resultat hinsichtlich seiner geographischen Relevanz uninteressant sind, werden nicht erörtert.

Die Arbeit enthält aus Gründen der besseren Lesbarkeit Wiederholungen. Aus dem gleichen Grunde wurde der Lösung relativ komplexer Probleme die Lösung von einfachen vorangestellt, und zwar auch dann, wenn sich diese wie etwa im 5. Kapitel nachträglich als Spezialfälle der ersteren herausstellen.

Da die Deduktionen, nachdem die Voraussetzungen einmal gegeben sind, rein rational vorgenommen werden, sind die Resultate hauptsächlich für die Ange-

wandte Geographie von Interesse. Zur Erklärung bestehender Phänomene eignen sie sich nur sehr bedingt; Schlüter (1930, S. 308) formuliert: „Eine rationale Deutung für sich schwebt in der Luft"; Hettner (1952, S. 142) schreibt dazu: „Das Verkehrsnetz alter Kulturländer kann nur geschichtlich verstanden werden. Nur in neuen Kolonialländern verdankt es seine Anlage bewußterer Überlegung."

Schwierigkeiten bereitete die Demonstration der Untersuchungsergebnisse an praktischen Beispielen. Aus der Korrespondenz mit verschiedenen Verkehrswissenschaftlern ergab sich, daß das dafür erforderliche Zahlenmaterial gegenwärtig offenbar nicht zu beschaffen ist. Den Herren Dr. R. Hoffmann, Braunschweig, und P. Friedrich, Berlin, verdanke ich den Ratschlag, bei den Zahlenbeispielen von typischen Durchschnittswerten auszugehen. Dieser Empfehlung ist in den meisten der vorgelegten Beispiele entsprochen worden.

An dieser Stelle möchte ich meinem Doktorvater und Lehrer, Prof. Dr. Dr. J. H. Schultze, meinen besonderen Dank für seine vielfältige Unterstützung, Förderung und Kritik abstatten.

Zu Dank verpflichtet bin ich ebenfalls Prof. W. L. Garrison, Northwestern University, für seine großzügige Hilfe. Wertvolle Anregungen verdanke ich Herrn P. Friedrich, Berlin, sowie Prof. N. A. Boukidis und Prof. D. Marble, Northwestern University, Evanston/Ill./USA.

Manuskript abgeschlossen
im April 1965.

Christian Werner

1. EINLEITUNG

11. Abgrenzung des Themas

Nur wenige Erscheinungen, die wir im Raum der Erdoberfläche antreffen, sind statischer Natur, fast alle sind als Funktionen der Zeit veränderliche Größen. Ihre Veränderung in der Zeit vollzieht sich in der Weise eines evolutionären Prozesses, der sich als Ortswechsel von Masse und Energie, also als Bewegung im Raume ereignet.

Eine Bewegung wird – unter anderem – gekennzeichnet durch Ursache, Objekt, Bahn und die Gesetze, denen sie gehorcht. Die Ursachen können, um einem geographischen Gliederungsprinzip zu folgen, in solche der anorganischen, der organischen und solche der geistbestimmten Welt eingeteilt werden. An dieser Stelle soll eine zweifache drastische Einschränkung des Diskussionsgegenstandes vorgenommen werden: Wir wollen in der Folge nur noch solche Bewegungen im Raum der Erdoberfläche berücksichtigen, die erstens relativ großräumig sind[1], und die zweitens hinsichtlich ihrer Ursache und der Gesetze ihres Bahnverlaufes der geistbestimmten Welt angehören.

Wir kommen damit zum Begriff des Verkehrs, dem hier die Definition von Predöhl (1958, S. 9) zugrunde gelegt werden soll: Nach ihm umfaßt Verkehr den Transport von Personen, Gütern und Nachrichten in jeder Form, zu Wasser, zu Lande und zur Luft.

Damit zählen alle Bewegungsvorgänge im Bereich des Mikrokosmos nicht zum Verkehr, auch sind etwa die Zugstraßen barometrischer Minima oder die Wanderungen von Heringsschwärmen oder vom Menschen unbeabsichtigt verursachte Bodenerosion keine Verkehrserscheinungen.

Die nächste thematische Einschränkung betrifft den Verkehr, der entweder Selbstzweck ist, wie z. B. bei sportlichen Ereignissen, oder von anderen als ökonomischen Gesichtspunkten (z. B. ästhetischen) diktiert wird. Genauer: Wir klammern alle Verkehrserscheinungen aus, die maßgeblich von Faktoren beeinflußt werden, die sich auf Grund ihrer Natur inhaltlich wie formal den ökonomischen Maßstäben oder Betrachtungsweisen entziehen. Es muß hier jedoch

[1] Hettner (1952, S. 5) spricht von „einigermaßen großem Abstand"; eine präzisere Bezeichnung wäre wohl unzweckmäßig.

darauf aufmerksam gemacht werden, daß das verhältnismäßig selten der Fall ist. Beispielsweise können fast alle den Verkehr betreffenden politischen Entscheidungen wie Volumenbegrenzung, Zwischenpunkte oder Sperrzonen als fest gegebene Voraussetzungen in die ökonomischen Überlegungen einbezogen werden.

Andere irrationale oder nicht bestimmbare Faktoren wie etwa zukünftige Verkehrsentwicklung werden durch Schätzwerte – von freilich unterschiedlicher Güte – repräsentiert.

Eine räumliche Begrenzung ergibt sich aus der folgenden zusätzlichen Bedingung:

Wir betrachten nur solchen Verkehr, der bezüglich seiner Bahnen von der dritten Dimension des Verkehrsraumes unbeeinflußt bleibt. Das bedeutet: Je reliefempfindlicher der Verkehr ist, um so mehr müssen die Gebiete, in welchen er sich bewegt, der idealen Ebene entsprechen, falls er Gegenstand unserer Betrachtung sein soll. Im vierten und fünften Kapitel wird außerdem noch gefordert, daß der Verkehrsraum insgesamt homogen, seine Einflußnahme auf den Verlauf der Verkehrsbahnen also unerheblich ist.

Schließlich beschränken wir uns auf jeweils ein Verkehrsmittel. Das macht bei analytischer Betrachtungsweise keine Schwierigkeiten, weil sich in der Theorie die je nach Verkehrsmittel unterschiedlichen Verkehrsformen aus ihrer faktischen Verzahnung lösen lassen, indem die Punkte, in welchen der Verkehr bei gleichbleibendem Verkehrsobjekt das Verkehrsmittel wechselt, als Ziel- beziehungsweise Ursprungspunkte von getrennten Verkehrsleistungen angenommen werden.

Der im folgenden zu untersuchende Verkehr erfüllt also die unter (a) bis (c) genannten Kriterien:

(a) Er ist ökonomisch-quantitativer Betrachtungsweise zugänglich.
(b) Sein räumlicher Ablauf wird von der dritten (vertikalen) Dimension nicht nennenswert beeinflußt.
(c) Er bewegt sich gegebenenfalls (Kapital 4 und 5) in einem homogenen Verkehrsraum.

Rückschauend kommt man nicht umhin, festzustellen, daß die einzelnen Einschränkungen zur sukzessiven Eingrenzung des Themas zum Teil von derart schwerwiegender Natur sind, daß eine prinzipielle Rechtfertigung erforderlich erscheint. Dieselbe ist Gegenstand des folgenden Abschnitts.

12. Der zweidimensionale homogene Verkehrsraum

Von den mannigfachen Einschränkungen, denen der Gegenstand der vorliegenden Arbeit unterworfen wird, ist die Voraussetzung des zweidimensio-

nalen homogenen Raumes wohl die bedeutsamste. In der Tat erscheint sie auf den ersten Blick so gravierend, daß an ihrem Beispiel das Prinzip der Einschränkung überhaupt exemplifiziert und gerechtfertigt werden soll.

Die Kritik ist eine zweifache:

(1) Nahezu ideale Ebenheiten sind auf der festen Erdoberfläche sehr selten, außerdem sind auch sie wegen der Varianz der Böden, der Vegetationsdecke und des Gewässernetzes, um nur einige Faktoren zu benennen, durchaus inhomogen.

(2) Da nach (1) die Voraussetzungen der Untersuchung unrealistisch sind, sind es notwendig auch die Ergebnisse.

Die beiden Punkte der Kritik sollen getrennt beantwortet werden.

121. Einschränkung in der Sache

(1) Für unser Thema sind alle Phänomene und ihre räumliche Varianz auf der Erdoberfläche, die auf die Geometrie von Verkehrslinien keinen Einfluß haben, uninteressant. Deshalb bedeutet Homogenität des Verkehrsraumes hier nur Homogenität bezüglich aller die Verkehrslinien beeinflußenden Faktoren, und in diesem Sinne werden erhebliche Teile der Erdoberfläche von homogenen Räumen eingenommen. Allgemein wird in der Fachliteratur (u. a. E. Keller 1929, S. 349) eine direkte funktionale Abhängigkeit zwischen dem Maß der Inhomogenität einerseits und dem Maß der Abweichung der Verkehrslinie vom geometrisch idealen Verlauf – für gewöhnlich die gerade Linienführung – andererseits angenommen. Wenn Inhomogenitäten des Verkehrsraumes die Verkehrslinien zu Abweichungen von der geraden Strecke veranlassen, so spricht man von Umwegen. Je größer der Umweg, um so größer die ihn bedingende Inhomogenität. Ein Maß für den Umweg ergibt der Vergleich der „Luftlinienentfernung" zweier durch einen Verkehrsweg verbundener Verkehrsquellen mit der tatsächlichen Länge des Weges. Nimmt man letztere als 100 % und subtrahiert den entsprechenden Prozentsatz für die Luftlinienentfernung, so bleiben als Rest jene Prozente der Gesamtstrecke, die durch Umwege verursacht werden. Sie messen also den Einfluß von inhomogenen Faktoren im Verkehrsraum zwischen den beiden Verkehrsquellen. Anders formuliert: Jede Wegstrecke setzt sich zusammen aus der Strecke, die zur Überwindung des reinen Raumes erforderlich ist (hier als Luftlinienentfernung bezeichnet), und einer Summe von Strecken, die durch Umwege bedingt werden.

Für zahlreiche Verkehrswege ist der Anteil an Umwegen nahezu oder gleich Null. Dazu gehören beispielsweise eine Vielzahl von Flug- und Schiffsverbindungen, von Pipelines und von Energieleitungen (z. B. der Telegraphie), von der drahtlosen Übermittlung von Nachrichten einmal ganz abgesehen.

Völlig zu Recht gilt die Linienführung der Eisenbahnen als besonders empfindlich gegenüber solchen Inhomogenitäten des Raumes wie etwa Relief, Böden und Gewässernetz, so daß sich an ihr am ehesten die Voraussetzung des homogenen Raumes als unrealistisch erweisen müßte. Dazu ein Zitat von E. Keller (1929, S. 623):

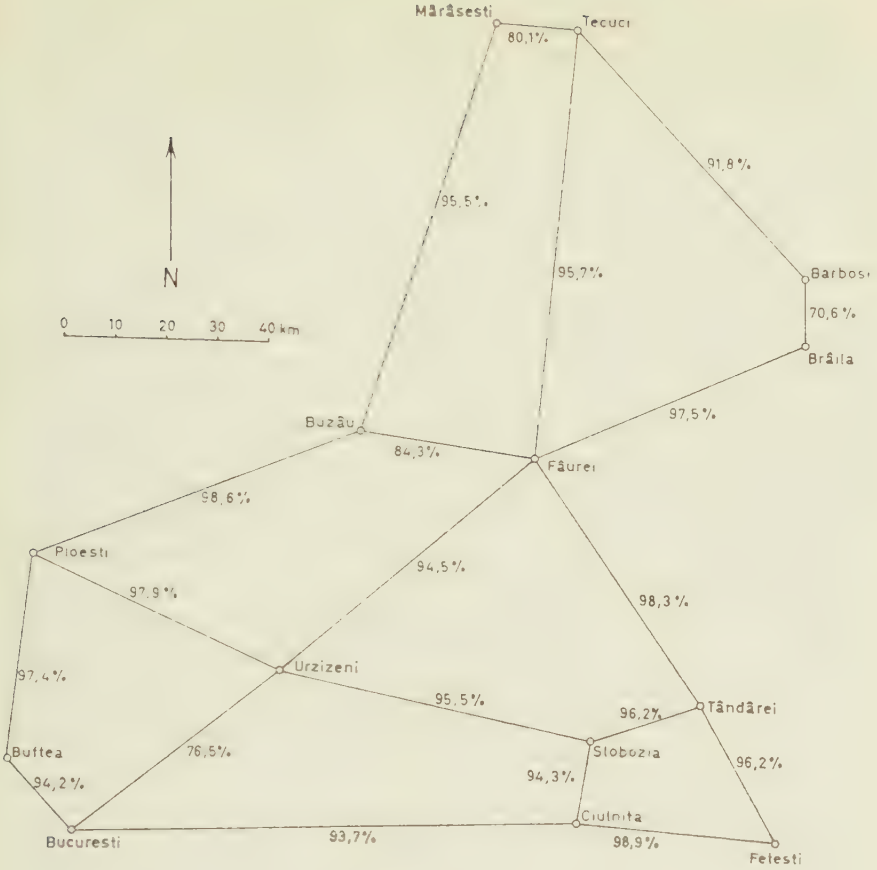
„Vergleichen wir die großen (Eisenbahn-) Strecken (in Deutschland) untereinander, so fällt auf, daß die Flachlandstrecken nicht über 15 % Umwege aufweisen . . ."

Das bedeutet, daß im deutschen Flachland die Linienführung der Eisenbahnen zu 85 oder mehr Prozent von den geometrischen Gegebenheiten, nämlich den Lagebeziehungen im „idealen Raum" diktiert wird.

Es gibt aber noch eindrucksvollere Beispiele. Die Luftlinienentfernung zwischen Berlin und Hannover beträgt 252 Kilometer, die Länge der Bahnlinie über Stendal 256 Kilometer, nur 1,5 % der Gesamtstrecke sind also durch Umwege bedingt, die restlichen 98,5 % werden von der rein geometrischen Situation verursacht. Die Strecke von Berlin nach Marienburg in Ostpreußen über Küstrin und Schneidemühl mit einer realen Länge von 444 Bahnkilometern hat auf den drei Abschnitten einen Luftlinienanteil von 93,1 %, 98,9 % und 96,1 %. Andere Beispiele sind: Autobahn Berlin–Nürnberg–München durch Flach- und Mittelgebirgsland 92,2 %; die Bahnlinie Buenos Aires–Valparaiso 96,3 % – trotz der Anden!

Nicht nur einzelne günstig gelegene Wege, sondern auch ganze Verkehrsnetze werden bisweilen fast ausschließlich von den geometrischen Lagebeziehungen der Verkehrsquellen beherrscht. Figur 1.1 zeigt das Eisenbahnetz der östlichen Großen Walachei, einem jungen Aufschüttungsgebiet im südlichen Karpatenvorland. Seine beiden einzigen Strecken, die über 20 % Umwege aufweisen, sind die Verbindungen Bráila–Barbosi im Nordosten und Urzizeni–Bukuresti im Südwesten. Erstere umgeht mit großem Bogen ein Sumpfgebiet der Donauniederung, letztere führt, die die Stadt umschließende Ringlinie benutzend, weit im Norden von Bukuresti am Stadtgebiet vorbei und schwenkt dann nach Süden ein, um sich mit den aus Norden, Nordwesten und Südwesten kommenden Linien zu vereinigen und gemeinsam mit ihnen in Richtung Südost dem Hauptbahnhof zuzustreben. Die Prozentzahlen geben den jeweiligen Luftlinienanteil an den einzelnen Bahnstrecken an.

Andere Beispiele für die formale Selbstständigkeit von Netzen im physischgeographischen Raum, wie sie in streng geometrischen Konfigurationen zum Ausdruck kommt, sind: Die exakt rechteckigen Straßennetze im amerikanischen Mittleren Westen / Die Entwässerungs- bzw. Bewässerungssysteme in den Niederlanden oder im sudanesischen Baumwollanbaugebiet im Osten der Gezira /



Figur 1.1

Vereinfachte Skizze des Eisenbahnnetzes zwischen Donau- und Karpatenbogen im südöstlichen Rumänien. Die Prozentsätze entsprechen dem Anteil der „Luftlinienentfernung" an der tatsächlichen Länge der einzelnen Netzglieder. Die geometrischen Abstände wurden topographischen Karten entnommen, die Zahlen der Eisenbahnkilometer dem amtlichen rumänischen Fahrplan (Căile Ferate Romîne / Bucuresti 1961).

Das Netz der Erdgas-Pipelines im südlichen Louisiana / Das elektrische Verbundnetz in Mitteleuropa nördlich der Alpen / und so fort.

Wir benennen zusammenfassend als erstes Argument für eine Rechtfertigung einer rein geometrisch-abstrakten Untersuchung von Verkehrslinien die Tat-

sache, daß ein beachtlicher Anteil aller Verkehrslinien auf der Erdoberfläche wenig, fast oder gar keine durch Inhomogenität des Verkehrsraumes bedingten Umwege aufweist. In diesem Sinne ist die Voraussetzung des homogenen Raumes nur eine quantitative Einschränkung der Untersuchungsobjekte, nicht aber ein Bruch mit den realen Gegebenheiten.

122. Einschränkung als Methode

(2) Von noch größerer, nämlich methodischer Bedeutung ist ein zweites Argument. Geographische Phänomene sind immer das Resultat eines komplexen Wirkungsgefüges. Die Vielfalt und Verzahnung der Kräfte ist so groß, daß eine analytische Zerlegung des Kräftespiels in die einzelnen Komponenten unmittelbar nicht gelingen kann. Deshalb empfiehlt es sich, einzelne Faktoren künstlich, d. h. hier rein gedanklich, zu isolieren, um dann das derart simplifizierte Problem zu untersuchen. Der Verlust an Realität ist ein doppelter: Einmal die Ausschaltung einer Reihe von Komponenten, zum anderen die Ausschaltung der Interdependenz zwischen den in die Untersuchung einbezogenen und den von ihr ausgeklammerten Faktoren.

Der Gewinn dieser Methode ist ebenfalls ein doppelter: Mit Hilfe der Isolierung lassen sich Aussagen über die einzelnen Kräfte „an sich" machen, und es kann gelingen, durch gedankliche Synthese der nunmehr analysierten Einzelfaktoren das ursprüngliche Wirkungsgefüge in seiner Komplexität wieder herzustellen, womit gleichzeitig seine Struktur erkannt wird und damit das gestellte Problem gelöst ist.

Dazu ein anschauliches Beispiel aus der Experimentalphysik: Auf der Erdoberfläche wirkt die Kraft der Massenanziehung nie allein, sondern immer in komplizierter Verknüpfung mit anderen Kräften. Trotzdem gelang es schon Galilei, genau festzustellen, in welchem Maße die Massenanziehung in Form der Erdbeschleunigung am freien Fall beteiligt ist.

In diesem Sinne haben die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit Anteil an der Erklärung oder Planung von Verkehrslinien, insofern sie nämlich Aussagen machen über die Struktur und den Einfluß einiger der maßgebenden Voraussetzungen wie geometrische Lagebeziehungen und ökonomische Bedingungen. Das letzte Kapitel ist ein Beispiel dafür, wie sich durch die Einbeziehung weiterer Faktoren – nämlich räumlicher Varianz der Böden – die gleichsam im Laboratorium erzielten Ergebnisse schrittweise der Komplexität und damit der Realität des Gesamtproblems annähern lassen.

13. Die Mathematik als Hilfswissenschaft in der Verkehrsgeographie

Sowohl in den Geisteswissenschaften wie besonders auch in den Naturwissenschaften gibt es zahlreiche Phänomene, deren formale Prinzipien mathematischer Natur sind. Man bedient sich deshalb in solchen Fällen der Mathematik als Hilfswissenschaft. Es ist dabei aus Gründen der Zuständigkeitsabgrenzung wichtig festzustellen, daß die Anwendung mathematischer Ergebnisse nicht Gegenstand der Mathematik, sondern der jeweils betroffenen Einzelwissenschaft ist, denn die Mathematik selbst beschäftigt sich nur mit der Erforschung formaler Prinzipien, nicht aber mit deren Erscheinungsweise an irgendwelchen substanziellen Phänomenen.

Dieser Tatbestand ist auch für die Geographie bedeutsam, weil eine Vielfalt ihrer Untersuchungsobjekte von mathematischen Prinzipien beherrscht wird. Als Massenphänomene verhalten sie sich statistisch, gehören sie der physisch-geographischen Welt an, so gelten für sie die mathematisch formulierten Gesetze der sogenannten exakten Naturwissenschaften. Während der „naiv" gegebene dreidimensionale Raum Gegenstand der Euklidischen Geometrie ist, beschäftigt sich die Geographie mit Phänomenen und ihren räumlichen Beziehungen, die diesen Raum erfüllen. Die Frage, ob mathematische Prinzipien an der geographischen Erscheinungswelt konstituierend mitwirken, ist deshalb nicht Sache persönlicher Anschauung, sondern vielmehr von vornherein durch die Natur der Erscheinungen positiv entschieden worden.

Dementsprechend gibt es im speziellen Falle der Verkehrsgeographie zahlreiche Phänomene, die mathematischen, insbesondere geometrischen Eigenschaften genügen. Die Flug- und Schiffahrtslinien orientieren sich, soweit ihre Linienführung nicht von anderen Faktoren vorgeschrieben wird, an den Gesetzen der Kugelgeometrie, die Verteilung von Wasser und Land, von Bevölkerung und Bodenschätzen läßt sich wahlweise eindeutig charakterisieren durch Systeme von Entfernungen, durch Winkelbeziehungen oder durch die Positionen im Gradnetz. Die Verkehrsquellen treten in punkt- oder flächenförmiger Verteilung auf, der Verkehr selbst verläuft entlang bestimmter Bahnen im Raum, diese wieder stehen in Beziehung zu gegebenen Leitlinien wie etwa natürlichen oder politischen Grenzen.

Teils unabhängig von den geometrischen Bedingungen, teils in Wechselwirkung mit ihnen gelten algebraische Eigenschaften und Beziehungen. So ist jeder Verkehr eine Funktion der Zeit, der Verkehr wie auch die Objekte des Verkehrs treten in bestimmten Mengen auf, solchen Mengen sind wieder gewisse Energiequanten zugeordnet, die den Verkehrsvollzug bewirken; schließlich stehen die Systeme von Punkten, Entfernungen, Mengen, Funktionen in der Verkehrsplanung unter dem übergeordneten Prinzip der Optimalität, sei es

bezüglich des geringsten Widerstandes, der kürzesten Entfernungen, der größten Transportmengen, und so fort.

Alle diese Kräfte wirken mit an dem komplexen Erscheinungsbild der – bestehenden oder geplanten – verkehrsgeographischen Realität. Freilich darf nicht übersehen werden, daß sie nur in den seltensten Fällen das Wirkungsgefüge vollständig beherrschen, für gewöhnlich treten Komponenten an ihre Seite, die weder mathematisch noch geographisch sind, so etwa Sicherheitsvorschriften oder ästhetische Gesichtspunkte.

Einige Beispiele, zum Teil aus der Fachliteratur, sollen demonstrieren, wie sich die Massen verkehrsgeographischer Substanz mit mathematischen Prinzipien, die hier nur unvollständig und ungeordnet dargelegt wurden, in der Realität zu konkreten Problemen formen.

Das erste Beispiel sei etwas ausführlicher geschildert. Nehmen wir an, daß zur Befriedigung einer bestehenden Verkehrsspannung eine transozeanische Flugverbindung zwischen zwei Verkehrsquellen eingerichtet werden soll. Etwas abseits von der Luftlinie liege auf halbem Wege eine Insel, die für Zwischenlandungen gut geeignet wäre. Eine Kostenrechnung mag zu der Entscheidung führen, daß es sich lohnt, auf der Insel einen Landeplatz mit allem Zubehör anzulegen und einen gewissen Umweg für die Flugroute in Kauf zu nehmen, um andererseits den Vorteil größerer Nutzlast pro Verkehrsmaschine wahrzunehmen, der sich daraus ergibt, daß das Flugzeug durch zweimaliges Tanken erheblich weniger Treibstoff mit sich führen muß als im Falle des Non-stop-Fluges.

Man sieht: Ursache und Wirkung sind geographische Erscheinungen, verknüpft aber werden sie durch eine Kombination von geographischen und nichtgeographischen Faktoren, deren quantitative Größen durch mathematische Prinzipien verbunden sind. Allgemein formuliert: Zur Erkenntnis von Wirkungsgefüge und Interdependenz geographischer Erscheinungen bedient sich die Geographie nach Bedarf, abhängig von der Natur des Problems, der Ergebnisse der Nachbarwissenschaften, in diesem Fall der von der Mathematik aufgestellten Rechengesetze. Dieser Satz mag trivial erscheinen, ist es jedoch nicht, wie ein Rückblick auf die Geschichte der Verkehrsgeographie zeigen wird.

Weitere Beispiele:

Schon im antiken Griechenland beschäftigte man sich mit dem Problem, welchen Weg ein Wanderer wählen muß, der auf seiner Wanderung von einer Siedlung zu einer anderen unterwegs einen in der Nähe fließenden Bach zum Wasserschöpfen aufsuchen möchte, ohne dabei die Gesamtstrecke mehr als notwendig zu verlängern (Miehle 1958).

Das sogenannte „Traveling-Salesman-Problem": Ein Geschäftsreisender will eine Reihe von Städten besuchen und anschließend zu seinem Wohnort zurückkehren. Welches ist die kürzeste Route?[2]

Zwei Ortschaften sollen durch eine Straße verbunden werden, das zwischen ihnen gelegene ebene Gelände hat sehr unterschiedliche Böden, entsprechend schwanken die Baukosten pro Längeneinheit. Welches ist die kostengünstigste Trasse?

Inwiefern sind diese Beispiele geographisch? Jedes ihrer Probleme zielt darauf ab, eine Verkehrsroute festzulegen. Verwendet man nun die auf theoretischem Wege gewonnenen Lösungen in der Planung, so bedeutet das Gestaltung der Kulturlandschaft.

14. Das Verkehrsnetz

141. Beschreibung

„Geometrie" und „Verkehrsnetz" sind die beiden Stichworte der vorliegenden Arbeit. Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten einiges über die Rolle der Mathematik und speziell der Geometrie in der Verkehrsgeographie gesagt wurde, soll nun das Phänomen des Verkehrsnetzes vorgestellt werden.

Die von dem Verkehr und für den Verkehrsvollzug geschaffenen Verkehrsnetze zählen zu den funktional wie physiognomisch markantesten Erscheinungen der Kulturlandschaft. Der Grad ihrer Vielfalt und Differenzierung wird erkennbar etwa aus der Tatsache, daß in einer Großstadtlandschaft Mitteleuropas nahezu jedes Wohngebäude an die Netze für Elektrizität, für Gas, Wasser, Abwässer und Straßenverkehr angeschlossen ist. Nicht nur die Netze als Leitungssysteme, sondern die verschiedensten Verkehrsarten selbst zeigen den typischen Netzcharakter. Allein das Straßennetz trägt so verschiedenartige netzförmige Verkehrsströme wie die Müllabfuhr, den Warenverkehr vom Großhandelslager über die Einzelhandelsgeschäfte bis zum einzelnen Wohngebäude, oder die Postzustellung. Das Hauptpostamt steht durch ein Netz von Rohrpostleitungen mit Nebenpostämtern in Verbindung, diese bedienen mit ihrem Zustelldienst die durch Straßen erschlossenen Wohngebiete. Andererseits steht das Hauptpostamt wieder über Bahn-, Straßen- und/oder Rohrpostnetz in Verbindung mit Bahnhof und Flughafen. Industriebetriebe haben eventuell außer an viele innerstädtische Netze noch zusätzlichen Anschluß an Eisenbahn-, Fernschreib- und Kanalnetz.

Eine Vielzahl von Umschlagspunkten dient der Kooperation verschiedener Netze. Knotenpunkte, Kreuzungen und Gabelungen konzentrieren und ver-

[2] Merrill M. Flood, 1956: The Traveling Salesman Problem (Operations Research, Vol. 4, pp. 61—75).

teilen die Verkehrsströme in den einzelnen Netzen; es existiert kaum eine Verkehrslinie, die nicht Teil eines Netzes wäre.

Dies sind nur einige Andeutungen und ungegliederte Beispiele zu der außerordentlichen Bedeutung des Netzphänomens in der Stadtlandschaft. Ihnen seien Beispiele aus den agrarwirtschaftlich genutzten Gebieten gegenübergestellt.

Jede ihrer kleinsten Flächeneinheiten ist verspannt in ein System von Netzen und Verkehrsströmen. Über ein Verteilersystem von Landstraßen und Feldwegen sind sie das Verkehrsziel von Arbeitskräften, von landwirtschaftlichen Maschinen, von Dünger und Saatgut, jeder Quadratmeter bildet eine Verkehrsquelle, insofern seine Ernteprodukte abtransportiert werden müssen, eventuell hat er Anschluß an Bewässerungs- oder Drainagesysteme, und so fort.

Fast alle der genannten Beispiele aus Stadtlandschaft und ländlicher Flur haben ihr Äquivalent in den überregionalen Verkehrssystemen; vor allem auf sie beziehen sich die Untersuchungen dieser Arbeit.

Trotz ihrer kaum überschaubaren Vielfalt lassen sich hinter den aufgezählten Netzerscheinungen einige relativ einfache formale Prinzipien erkennen.

Ein Netz besteht aus mehreren (mehr als einer) Verkehrslinien, die Verkehrsquellen miteinander verbinden. Die Linien werden durch Knotenpunkte verknüpft. Jede von ihnen wird deshalb von genau zwei Punkten begrenzt, die Verkehrsquellen und/oder Knotenpunkte sein können. Ein Knotenpunkt kann für die von ihm ausstrahlenden Verkehrslinien als Verkehrsquelle aufgefaßt werden. Wir wollen zwei Verkehrslinien benachbart nennen, wenn sie durch eine Verkehrslinie verbunden sind und zwischen ihnen keine weiteren Verkehrsquellen an der Linie liegen. Dann gilt: Das Verkehrsvolumen zwischen benachbarten Verkehrsquellen ist konstant in dem Sinne, daß jeder und nur der in die (durch die beiden Punkte definierte) Verkehrslinie eintretende Verkehr diese auch wieder verläßt. Von Sonderfällen abgesehen ist es ein konstituierendes Merkmal für Verkehrsnetze, daß sie Verkehrsströme tragen, deren Objekte zwischen Herkunfts- und Zielpunkt mehr als eine Verkehrslinie benutzen. Die dafür erforderliche Konzentration und Diffusion von Verkehrsströmen besorgen die Knotenpunkte. Für die Bau- und Betriebskosten läßt sich schon jetzt ohne Kalkulation feststellen, daß sie, soweit sie von der Gesamtlänge der Verkehrslinien abhängen, bei deren Veränderung entgegengesetzte Tendenz aufweisen: Wachsende Gesamtlänge des Netzes führt zu wachsenden Baukosten und fallenden Betriebskosten. Mit anderen Worten: Gesamtlänge eines Netzes und Gesamtlänge seiner Verkehrsbewegungen sind reziproke Größen. (Reziprozität hier als logischer, nicht als mathematischer Begriff[3].)

[3] Die Mathematik versteht unter dem reziproken Wert B einer Größe A deren Kehrwert (B = 1/A), während der logische Begriff der Reziprozität ganz allgemein ein gegenläufiges Größenverhältnis meint (je größer B, um so kleiner A). (Der Große Brockhaus, 1956, 16. Aufl., Bd. 9, S. 708.)

142. Beispiele von Netzproblemen

Die Beschreibung soll hier, da ihr nur beispielhafter Charakter zugedacht wurde, abgebrochen werden; statt dessen wollen wir wiederum an Hand einiger Beispiele demonstrieren, wie die beschreibende Erfassung unmittelbar die wissenschaftliche Fragestellung nach sich zieht. Etwa in den letzten zehn Jahren ist vor allem in der amerikanischen Fachliteratur eine Flut von Veröffentlichungen erschienen, die sich mit Netzproblemen beschäftigen. Daraus einige Beispiele:

Gegeben sei ein Verkehrsnetz und die Kapazitätswerte der einzelnen Verkehrslinien. Zwischen zwei im Verkehrsnetz liegenden Verkehrsquellen soll ein möglichst großer Verkehr durchgeführt werden. Was ist sein maximales Volumen[4]?

Gegeben ein Netz und eine Anzahl in ihm liegender Verkehrsquellen A_i ($i = 1, 2, \ldots$), von denen aus gewisse Punkte B_j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) mit einer bestimmten Ware versorgt werden sollen (zum Beispiel die Versorgung von Tankstellen von einigen Depots aus). Von welchen Punkten A_i sollen welche Punkte B_j auf dem Wege über welche Netzlinien bedient werden[5]?

Eine Anzahl gegebener Verkehrsquellen soll miteinander durch ein Netz minimaler Länge verbunden werden. Wieviel Linien und Knotenpunkte hat das Netz, welches ist die Gestalt seines Grundrisses[6]?

Werden drei miteinander in Verkehrsspannung stehende Punkte ökonomischer durch ein Netz der Gestalt $\curlyvee$ oder der Gestalt $\triangle$ bedient[7]?

Gegeben ein Spannungsfeld und ein Netz zur Befriedigung dieser Verkehrsspannungen. Falls das Netz erweitert werden soll: Welche Erweiterung wäre die wirtschaftlich sinnvollste[8]?

Gegeben eine Anzahl von Verkehrsquellen und ein sie verbindendes Netz. Wie läßt sich die Güte der Verkehrslage eines Punktes im Netz definieren, welches ist dementsprechend die Verkehrsquelle mit der günstigsten Verkehrslage[9]?

143. Definitionen

Um die Beschreibung des Netzphänomens und seiner Probleme für spätere Untersuchungen begrifflich genügend aufzubereiten, folgt eine Aufstellung von

---

[4] Fulkerson, D. R., and Dantzig, G. B., 1956: On the Max-Flow Min-Cut Theorem of Networks. (Papers on Linear Inequalities and Related Systems = Nr. 38 der Annals of Mathematical Studies.)

[5] Orden, A., 1956: The Transshipment Problem (Management Science, Vol. 2, pp. 227—285).

[6] Miehle 1958.

[7] Beckmann 1960.

[8] Quandt 1960.

[9] Garrison 1960.

Definitionen, die bereits eingeführte oder noch einzuführende Bezeichnungen fixieren sollen. In Klammern sind synonyme Begriffe vermerkt.

VERKEHR: Transport von Personen, Gütern und Nachrichten in jeder Form, zu Wasser, zu Lande und zur Luft (Predöhl 1958, S. 9).

VERKEHRSSPANNUNG: Verkehrsbedürfnis zwischen zwei Punkten der Erdoberfläche. Ursprung, Volumen und Richtung kennzeichnen die Verkehrsspannung im Sinne der Analytischen Geometrie als Ortsvektor.

VERKEHRSSPANNUNGSFELD: Mehrere räumlich benachbarte Verkehrsspannungen.

VERKEHRSQUELLE (Quellpunkt): Ursprungs- oder Zielpunkt von Verkehr.

VERKEHRSQUELLGEBIET: Flächenhaftes Kontinuum von Verkehrsquellen.

QUELLSTÄRKE: Pro Zeiteinheit anfallendes Verkehrsvolumen einer Verkehrsquelle oder -quellgebietes.

VERKEHRSLINIE (VERKEHRSWEG): Raumkurve einer (potentiellen) Verkehrsbewegung.

VERKEHRSSTRECKE: Gradliniger Verkehrsweg zwischen zwei Punkten.

VERKEHRSSTRECKENZUG: Verkehrsweg, der sich aus einzelnen Verkehrsstrecken zusammensetzt. Formal, d. h. mathematisch gesprochen, handelt es sich also um einen Polygonzug.

GLIED (SEGMENT): Strecke in einem Streckenzug.

VERKEHRSPUNKT: Punkt eines Verkehrsweges, in welchem sich Volumen, Zusammensetzung oder Richtung des Verkehrs ändert.

VERKEHRSGABEL: Genau drei in einem Punkt zusammenlaufende Wege. Den Punkt selbst bezeichnen wir als GABELPUNKT.

VERKEHRSKNOTEN (KNOTENPUNKT): Ein Punkt, in welchem drei oder mehr Verkehrswege zusammenlaufen.

VERKEHRSNETZ: Mehrere Verkehrswege, die durch Knotenpunkte verknüpft sind.

NETZGLIED: Verkehrslinie eines Netzes, die durch zwei benachbarte Verkehrspunkte begrenzt wird.

Aus den Definitionen ergeben sich eine Reihe von Konsequenzen wie zum Beispiel die, daß jeder Gabelpunkt auch Knotenpunkt und jeder Knotenpunkt auch Verkehrspunkt ist, die Umkehrung aber nicht gilt.

Weitere Bemerkungen zur Terminologie:

(1) Speziellere Begriffe werden später nach Bedarf in die Überlegungen eingeführt.

(2) Begriffe wie Punkt und Kurve sind als Generalisierungen zu verstehen und damit abhängig vom Maßstab der Betrachtung. So kann je nach Maßstab eine Stadt als Quellpunkt, ihr Industriegelände aber als Quellgebiet aufgefaßt werden.

(3) Bezeichnungen, die keinen Anlaß zu Mißverständnissen geben können, werden nicht definiert.

(4) In der Folge werden alle Kurven durch approximierende Polygonzüge ersetzt. Im Falle eines Verkehrsweges ist jeder Eckpunkt des zugehörigen Polygons Verkehrspunkt.

2. DER VERKEHR ALS ÖKONOMISCHES PROBLEM

21. Verkehrsursache, Verkehrsspannung

Jedes menschliche Dasein vollzieht sich in einem ununterbrochenen geistigen und materiellen Austausch mit seiner Umwelt. Sowohl der Kontakt des Menschen zu seiner sozialen, d. h. mitmenschlichen Umgebung als auch seine wirtschaftende Aktivität zur Sicherung der materiellen Basis erfordern Überwindung des Raumes und erzeugen damit Verkehrsspannungen, weil die Verteilung des Menschen über die Erde wie auch die natürliche Ausstattung des ihn umgebenden Lebensraumes auf ihr äußerst unterschiedlich sind. Die Befriedigung des notwendigen Existenzminimums, noch viel mehr aber das Streben nach Befriedigung aller bestehenden oder erwachenden Bedürfnisse veranlaßt den Menschen, mit dem Hilfsmittel des Verkehrs Bedarf und Angebot im weitesten Sinne zu räumlicher Kongruenz zu bringen. Die Entwicklung steuert auf eine Situation zu, in welcher jeder Mensch an der Kultur- und Naturausstattung der gesamten Erde direkt oder indirekt partizipieren wird.

Die notwendig räumliche Verteilung des Menschen auf der Erdoberfläche, die räumlich vorgegebene und damit fest fixierte Lage zahlreicher Rohstoffquellen, das Prinzip der Arbeitsteilung, die vielfältigen Gründe für Standortgebundenheit bedingen es, daß die Ausschaltung des Verkehrs durch räumliche Vereinigung aller in Verkehrsspannung stehenden Verkehrsquellen unmöglich ist. Deshalb ist Verkehrsspannung eine permanente Erscheinung auf der Erdoberfläche. Zu ihrer heutigen Verbreitung entwickelte sie sich aus einer Unzahl von kleinräumigen Spannungsfeldern, die in der Frühzeit des Menschen zwischen Familien, Sippen und Stämmen und ihren sozialen und wirtschaftlichen Lebensräumen bestanden. Über verschiedene Stufen wie primitiver Tauschhandel und nationale Volkswirtschaften, Wanderungsbewegungen und politisch-kulturelle Zusammenschlüsse wuchsen sie zum heutigen weltweiten Spannungsfeld zusammen. Es ist eine der wichtigsten Konsequenzen dieses geschichtlichen Prozesses, daß er zur Bildung industrieller Ballungsräume führte, deren gewaltige Bevölkerungsagglomerationen wirtschaftlich nicht autark sind und damit die Permanenz des Spannungsfeldes garantieren.

22. Verkehrswiderstand, Arbeitsaufwand

Verkehrsspannung weist vom Wort her schon auf ihren Gegenpol, den Verkehrswiderstand, hin. Rein formal ereignet sich Verkehr in dem Moment, wo die Verkehrsspannung größer als der ihr entgegenstehende Verkehrswiderstand wird. Welche Größenordnung dabei Kraft und Gegenkraft annehmen können, das zeigt sehr anschaulich die berühmte Überquerung der Alpen durch Hannibal.

Die Überwindung des Widerstandes erfordert einen Aufwand, der hier in Anlehnung an Richthofen (1908, S. 207 ff.) kurz diskutiert werden soll. Nach ihm vollzieht sich der Verkehr als Resultat einer Beförderungs-Arbeit, deren Ausmaß von den gegebenen inneren und äußeren Widerständen im Verkehrsraum abhängig ist. Unter inneren Widerständen versteht er Schwerkraft, Reibung und Trägheitsmoment, unter äußeren die Widerstände im Verkehrsraum wie etwa Vegetation, Gewässer, Oberflächenformen, aber auch kulturgeographische Bedingungen wie zum Beispiel politische Schranken.

Die räumliche Verteilung der Widerstände bedingt, daß die vom Verkehr zu überwindende Entfernung im allgemeinen nicht gleich dem Abstand von Ursprungs- und Zielpunkt ist, sondern gleich der Länge jener gekrümmten Raumkurve, entlang welcher sich der Verkehr faktisch vollzieht. Da der Arbeitsaufwand entlang der Kurve bei heterogener Verteilung verschiedenartiger Verkehrshindernisse im Verkehrsraum variiert, ist die erforderliche Gesamtarbeit A gleich der Summe aller Produkte, deren Faktoren die Längen der einzelnen Wegteile l_i und die ihnen entsprechenden Arbeitsaufwendungen pro Längeneinheit c'_i sind:

$$A = \sum_i c_i' \cdot l_i \qquad (2\text{–}1)$$

Die Größe c'_i läßt sich als Produkt aus Verkehrsvolumen f und den Beförderungskosten k_i pro Verkehrsvolumeneinheit und Weglängeneinheit auffassen:

$$A = \sum_i f \cdot k_i \cdot l_i = f \sum_i k_i \cdot l_i \qquad (2\text{–}2)$$

Zwischenbemerkung: In der weiteren Diskussion betrachten wir nur solchen Verkehr, der sich nicht als Selbstzweck versteht. Verkehr als Selbstzweck tritt bisweilen im Bereich von touristischen, sportlichen und religiösen Aktionen auf, besitzt aber quantitativ am Gesamtverkehr nur geringen Anteil.

Ist Verkehr nicht Selbstzweck, so stellt er gleichsam ein notwendiges Übel dar, und daher rührt das Bestreben, den für seinen Vollzug erforderlichen Arbeitsaufwand möglichst niedrig zu halten. Die Reduktion der Aufwendungen in Gleichung (2–2) erfordert, daß man Weglängen und/oder Arbeitsaufwand pro Verkehrsvolumen- und Längeneinheit reduziert. Wir wollen in der

Folge jeden Verkehrsaufwand mittels der durch ihn verursachten Unkosten messen; darunter fallen beispielsweise Entschädigungszahlungen für militärischen Schutz ebenso gut wie Unkosten für Treibstoff oder Verproviantierung. Außerdem nehmen wir an, daß die Überwindung von Verkehrshindernissen nur eine Kostenfrage ist. Formal ist eine solche Annahme durchaus gerechtfertigt, wenn man unüberwindlichen Hindernissen wie politischen Grenzen unendlich hohe Kosten für ihre Überwindung zuordnet.

Weglänge und Arbeitsaufwand sind in doppelter Weise voneinander abhängig, denn algebraisch wächst der durch Gleichung (2–2) gegebene Aufwand mit wachsender Länge l_i, andererseits verändert die wachsende Weglänge die räumliche Linienführung des Weges und damit die Kosten k_i. Das Minimum der Aufwandfunktion A wird deshalb dort zu finden sein, wo die Kostenersparnis durch Begradigung des Weges vom Wachstum der einzelnen Aufwandserträge k_i ausgeglichen wird. Die gegenläufige Bewegung der beiden Kostenfaktoren ergibt sich aus dem Umstand, daß mit zunehmender Begradigung immer weniger Rücksicht auf die räumliche Verteilung von Verkehrshindernissen genommen werden kann.

Außer dem trivialen Mittel der Verkehrsvolumensenkung besteht noch eine weitere Möglichkeit, den Gesamtaufwand A zu vermindern, und zwar durch Verringerung der Beförderungsaufwendungen pro Verkehrsvolumeneinheit und Längeneinheit, deren unterschiedliche Größen in Gleichung (2–2) mit k_i bezeichnet wurden. Sie repräsentieren die variierende Verkehrswiderständigkeit des Weges in Form von Reibung, Böschung und dergleichen. Durch künstliche Ausgestaltung des Weges, d. h. wegebauliche Investitionen, erfahren sowohl die Werte k_i als auch die Struktur der Kostenrechnung überhaupt eine beträchtliche Veränderung. Die Arbeitsaufwendungen pro Längeneinheit zerfallen nunmehr in zwei Aufwandtypen: bahnende Arbeit und Fahrarbeit, wie Hoffmann (1961, S. 1) sie nennt.

Wieder präsentiert sich das Problem, das Gesamtergebnis optimal zu gestalten, d. h. die Planung nach dem Gesichtspunkt der günstigsten Kostenrechnung auszurichten, als Frage nach dem Minimum einer Funktion mit zwei gegenläufigen Komponenten, denn die bahnende Arbeit bedeutet zusätzliche Investitions- und Instandhaltungskosten, gleichzeitig aber verbilligte Fahrarbeit. Als Gesamtproblem stellt sich also die Frage, wie man

(a) durch (räumliche) Wegverlagerung und
(b) durch (bauliche) Wegveränderung

den Aufwand minimal gestalten kann, wobei die Lage der beiden Verkehrsquellen, das Volumen des zu leistenden Verkehrs und die Verteilung der Verkehrshindernisse im Verkehrsraum als fixe Größen anzusehen sind.

23. Die Kostenrechnung

Die bisherigen Überlegungen auswertend, betrachten wir die durch den Arbeitsaufwand A anfallenden Unkosten C. Sie setzen sich zusammen aus Bau- und Instandhaltungskosten C_1 (in Zukunft kurz als Baukosten bezeichnet) sowie Betriebskosten C_2. Unter Baukosten sollen hier alle Kosten verstanden werden, die zwar von der Länge des Weges, nicht aber vom Verkehrsvolumen abhängen. Beispielsweise gehören dazu die Baukosten für die Bahnhöfe einer U-Bahn-Linie, sofern sie in festen Abständen, z. B. alle 500 Meter, angelegt werden, nicht dazu aber zählen die Unkosten für ein Hafenbecken, das in Zusammenhang mit der Eröffnung einer neuen Schiffahrtslinie benötigt wird. – Als Betriebskosten werden alle vom Verkehrsvolumen und der Weglänge abhängigen Aufwendungen bezeichnet. Alle anderen Kosten wie etwa fixe Anlaufkosten bleiben hier unberücksichtigt, sie können jedoch, falls sich das im konkreten Fall als notwendig erweist, als konstante Größen in die Rechnung eingehen.

Wie C_1 und C_2 sich im einzelnen aufgliedern (Grundstücks-, Baumaterial-, Energie-, Lohnkosten usw.), wird ausführlich in der Arbeit von Friedrich (1956, S. 7 ff.) behandelt.

Vollzieht sich der Verkehr über einen längeren Zeitraum, so sind Instandhaltungs- und Betriebskosten im Gegensatz zu den Baukosten laufend anfallende Ausgaben. Um sie vergleichbar zu machen, soll für Baukosten im folgenden die jährliche Verzinsungsrate des Baukapitals genommen werden[10]. Ebenso sollen alle laufenden Ausgaben mit ihren jährlichen Beträgen in die Rechnung eingehen, so daß das Zeitintervall eines Jahres die Bezugseinheit für alle Kosten bildet.

Wir bezeichnen die Baukosten pro Weglängeneinheit auf dem Wegteil l_i mit c_i. Nimmt man an, daß die Baukosten C_1 linear mit der Länge der Wegteile l_i und die Betriebskosten C_2 linear mit dem Verkehrsvolumen f und der Länge der Wegteile l_i wachsen (wie das bereits in der Gleichung (2–2) angenommen wurde), so gilt:

$$C_1 = \sum_i l_i \cdot c_i \qquad C_2 = f \sum_i k_i \cdot l_i$$

und

$$C = C_1 + C_2 = \sum_i (f \cdot k_i l_i + l_i \cdot c_i)$$

$$= \sum_i (c_i + f \cdot k_i)\, l_i \qquad (2\text{–}3)$$

[10] Da hier das Baukapital in Form eines unbefristeten Darlehens in die Kostenrechnung eingeht, werden Amortisierungskosten gleichzeitig aus der Betrachtung ausgeschlossen.

Um die in (2–3) aufgestellte Kostenfunktion auf ihr Verhalten und insbesondere auf ihre Minimalwerte hin untersuchen zu können, müssen einige ihrer Parameter als bekannt angenommen werden. In den folgenden theoretischen Kapiteln sind das das Verkehrsvolumen f, die Baukosten pro Längeneinheit c_i, die Betriebskosten pro Verkehrsvolumen- und Längeneinheit k_i sowie die Lage der Verkehrsquellen. Anders formuliert: Gegeben sind die wirtschaftlichen Voraussetzungen und als formale Richtlinie das Prinzip der Optimalität, gesucht ist die ihnen gemäße geometrische Lösung im geographischen Raum.

Bemerkung: Selbstverständlich ist auch die Umkehrung der Problemstellung möglich und würde dann Fragen wie etwa die nach der optimalen Verkehrsfrequenz aufwerfen, jedoch kann sie hier aus Gründen der Stoffbeschränkung nicht behandelt werden.

24. Das Prinzip der Verkehrsbündelung

Die folgerichtige Weiterentwicklung der bisherigen vorbereitenden Erörterungen über Verkehrsursachen, -spannungen, -aufwand und -wege führt uns zu einem der grundlegenden Phänomene des Verkehrs überhaupt: der Verkehrsbündelung. Sie wieder leitet unmittelbar über zum Ziel der Diskussion, dem Verkehrsnetz.

Die Tatsache, daß gewisse Räume der Erdoberfläche als verkehrsfeindliche Zonen, oder, sachlicher und genauer formuliert, wegen ihrer negativen Beeinflussung der Kostenrechnung gemieden werden, hat eine sehr spezifische Wirkung zur Folge: die räumliche Zusammenführung verschiedener Verkehrslinien.

Zu der von außen her wirkenden Kraft der Verkehrshindernisse, die – man könnte sagen: rein zufällig – verschiedene Verkehrsströme bündelt, indem sie dieselben in verkehrsgünstige Räume und Linien „abdrängt" (z. B. Gebirgspässe, Furten, Täler, militärisch gesicherte Zonen), tritt ein Moment, das den Menschen veranlaßt, die Verkehrsbündelung systematisch zu organisieren. Dazu betrachten wir den allgemeinen Ausdruck der Gesamtkosten (2–3). Er enthält einen vom Verkehrsvolumen unabhängigen Bestandteil C_1, der folglich bei wachsendem Verkehr konstant bleibt. Das bedeutet, daß die Gesamtkosten pro Verkehrsvolumeneinheit um so niedriger liegen, je höher das Verkehrsvolumen ist. Da dieses aber zwischen zwei Punkten als gegebene Größe angenommen worden war, gelingt eine Steigerung der Verkehrsfrequenz nur durch Bündelung verschiedener Verkehrsströme.

Bündelung bedeutet Vereinigung von Verkehrsströmen, deren Verkehrsspannungen hinsichtlich ihrer Lage als Ortsvektoren im Raum linear unabhängig sind, d. h. paarweise bezüglich ihrer Lage voneinander abweichen. Wird der durch sie

Figur 2.1

ausgelöste Verkehr zusammengeführt, so treten notwendig Umwege auf und damit eine Verteuerung der Gesamtkosten. Wiederum ist es eine Frage des optimalen Gleichgewichts von entgegengesetzten Kräften: einerseits die oben beschriebene Kostensenkung durch Bündelung von Verkehrsströmen und andererseits die gleichzeitige Verteuerung durch die durch die Bündelung bedingten Umwege.

Es ist interessant, daß hier zwei grundverschiedene Faktoren: die Verteuerung der Gesamtverkehrskosten in verkehrsfeindlichen Räumen auf der einen und ihre Verbilligung durch Massenverkehr auf der anderen Seite zum gleichen Resultat, nämlich der Verkehrsbündelung, führen. (In Kapitel 4 dieser Arbeit wird ein homogener Verkehrsraum vorausgesetzt, so daß nur die zweite der beiden Komponenten Gegenstand der Untersuchung ist.) – Beispiele für den ersten Faktor sind etwa die von Berlin nach Westen ausstrahlenden Luftkorridore oder die Meerenge von Gibraltar; Beispiele für den zweiten Faktor sind die transsibirische Eisenbahn, die Rheinbrücken oder die erste Eisenbahnverbindung Berlins mit Magdeburg und Leipzig. Zu letzterem Beispiel, das die Rolle der Kostenrechnung besonders anschaulich demonstriert, schreibt E. Keller (1929, S. 358): „Ganz unglaublich dünkt uns heute die Verbindung Berlin—Leipzig über Jüterbog-Wittenberg–Köthen–Halle nach Leipzig. Um Magdeburg und Leipzig zugleich mit Berlin zu verbinden, setzte man Köthen als Fixpunkt fest und war nun sicher, daß bei dieser Kombination die Bahn wirtschaftlich genügend Ertrag lieferte, was zunächst stark angezweifelt wurde. So sparte man Anlagekosten, die bei anderer Linienführung bedeutend höher geworden wären.“ (Siehe Figur 2.1 oben.)

Die Bündelung des Verkehrs zum Massenverkehr hat ihrerseits wieder weitreichende Konsequenzen:

Als Folge der Transportverbilligung pro Verkehrsvolumeneinheit wird bei vielen Verkehrsspannungen der kritische Schwellenwert, der in der Kostenrechnung über den faktischen Verkehrsvollzug entscheidet, unterlaufen, so daß sich die Spannung in fließenden Verkehr umsetzt. Desgleichen wird durch den wachsenden Massenverkehr die ihm zugrunde liegende Kostenrechnung derart verändert, daß sie ihrerseits bestimmte Schwellenwerte unterschreitet und damit den Verkehr in die Lage versetzt, unter dem Gesichtspunkt der ökonomischen Optimalität durch Kapitaleinsatz Verkehrsbarrieren baulich zu überwinden oder zu durchbrechen, die vorher wegen des geringeren Verkehrsaufkommens – wiederum auf Grund des Prinzips der günstigsten Kostenkalkulation – umgangen werden mußten. Mit anderen Worten: Was für den einzelnen Verkehrsfluß unrentabel ist, nämlich bestimmte Verkehrshindernisse zu überwinden, um damit eventuell erhebliche Umwege einzusparen, das gelingt ihm, indem er sich – mittels Umwege! – am Massenverkehr beteiligt, der nun, durch ihn und andere Verkehrsströme verstärkt, auf Grund günstigerer Kostenkalkulation das Hindernis überwindet.

Bemerkung: Eine unmittelbare Wirkung der Kalkulation von Verkehrskosten ist beispielsweise die Anlage oder Verlagerung von Verkehrsquellen an die Bahnen des bestehenden Verkehrs, um dadurch Baukosten einzusparen; doch kann hier auf die enge Verflechtung von wirtschafts- und siedlungsgeographischen Erscheinungen mit unserem Thema nicht eingegangen werden, zumal auch die Betrachtungsweise dieser Arbeit eine statische ist, denn die Voraussetzungen, auf denen die Deduktionen basieren, also Verkehrsquellen, Verkehrsvolumina, Baukosten usw., gehen als fest gegebene Größen in die Rechnungen ein.

25. Verkehrsbündelung und Verkehrsnetz

Das Prinzip der Bündelung kommt in der Bildung von Knotenpunkten zum Ausdruck, in ihnen laufen verschiedene Verkehrslinien zusammen und sammeln damit den Verkehr. Nur in Sonderfällen – etwa bei gemeinsamem Verkehrsziel – verläuft der weitere Verkehrsfluß geschlossen, für gewöhnlich aber sind die Zielpunkte räumlich so unterschiedlich, daß der gebündelte Verkehr sich wieder in seine Einzelteile aufspaltet, die dann ihren Zielen in verschiedener Richtung zustreben. Auch dies geschieht wieder, indem sich sukzessive Wege von der (Haupt-) Verkehrslinie des gebündelten Verkehrsstromes abspalten, was seinerseits zur Bildung von Knotenpunkten führt. Verkehrszusammenführung und Verkehrszerlegung sind also sowohl als Prozesse des Verkehrsvollzugs als auch im Erscheinungsbild der Verkehrslinien symmetrisch. Konzentration, Massentransport und Dispersion des Verkehrs bilden zusammen eine Grundeigenschaft des Verkehrsnetzes.

Figur 2.2
Das Beispiel entspricht dem Eisenbahnnetz von Südwest-Afrika mit 16 angeschlossenen Orten[11]. Es demonstriert noch einmal das charakteristische Moment, welches das Verkehrsnetz von beliebigen Agglomerationen von Verkehrslinien unterscheidet. Das sind:
funktional die Bündelung von Verkehrsströmen, und
formal die Gabelung von Verkehrslinien.

In der Weiterentwicklung des Gedankenganges erweist es sich, daß Verkehrsnetze wohl von unterschiedlich komplexer Natur sein können, das Prinzip sich aber nicht ändert. Denn: Die Bündelung konzentriert nicht nur den Verkehr verschiedener Quellpunkte, sondern – bei komplizierterer Gestalt des Spannungsfeldes – auch bereits gebündelte Verkehrsströme, was eventuell bei weiterer Konzentration zu einer Hierarchie von Knotenpunkten und Verkehrslinien führt. Ihr entspricht ein hierarchischer Aufbau der Verkehrsströme, inso-

[11] Nach W. Benton (Publ.): World Atlas (Encyclopaedia Britannica, S. 49, Chicago 1961).

fern jeder Knotenpunkt ankommende Verkehrsmengen zerlegt und die Einzelströme zu neuen Verkehrsmengen zusammenschließt. Die Hauptverkehrslinien des Netzes bilden zusammen ein gleichsam arbeitsteiliges System, indem sie die wirre Vielzahl der voneinander unabhängigen Verkehrsspannungen und der durch sie bedingten Verkehrsflüsse zu einigen wenigen Hauptverkehrsströmen zusammenziehen, wobei diese eine möglichst geringe Abweichung von den einzelnen Verkehrsspannungen haben. Die Leistung des komplexen Verkehrsnetzes besteht darin, daß es dem einzelnen Verkehrsfluß erlaubt, sich nacheinander an den verschiedensten Verkehrsströmen zu beteiligen, wobei er in jedem Knotenpunkt von einem Strom zu einem anderen überwechselt. Das Netz ist einem Schaltpult zu vergleichen, an welchem eine ungeordnete Menge von Einzelinteressen ökonomisch koordiniert wird.

Es gibt in der Kulturgeographie wohl nur wenige Erscheinungen, die durch konsequente Integration von Einzelinteressen eine derartige ökonomische Leistungsfähigkeit entwickeln wie das Verkehrsnetz. Dazu ein einfaches Beispiel, das nur die Tendenz augenfällig machen soll, in welchem Maße die Leistungsfähigkeit bei wachsender Komplexität des Netzes steigt.

In dem oben skizzierten Netz (Figur 2.2), das 16 Punkte miteinander verbindet, können bis zu 120 verschiedene Verkehrsspannungen bestehen. Das Netz, das sie alle bedient, besteht aus 16 Netzgliedern (davon sind 8 nur Zubringerlinien) und 6 Knotenpunkten. Rechnet man nur die Luftlinienentfernungen, so beträgt die Netzlänge ca. 1900 Kilometer, während sie, wollte man für jede der 120 Verkehrsspannungen einen gesonderten Weg bauen, ca. 56 000 Kilometer betragen würde.

3. ZUR GESCHICHTE DER THEORIE DER VERKEHRSNETZE

Untersuchungen über die Art der Komponenten des räumlichen Kraftfeldes, das zu der Ausbildung eines ganz bestimmten Verkehrsnetzbildes führt, sind in der Geschichte der Verkehrsgeographie schon sehr früh anzutreffen. In einer 1841 veröffentlichten Arbeit versucht J. G. Kohl[12], die Bedingungen, unter welchen Systeme von Verkehrswegen entstehen, wissenschaftlich zu erforschen. Methodisch bedient er sich des Prinzips der Modellvorstellung. Dabei nimmt er an, daß sich der Verkehr analog einer mechanischen Bewegung die Linienführung des geringsten Widerstandes wählt. Die unterschiedliche Verkehrswiderständigkeit des Geländes wird in ihrer räumlichen Verbreitung durch geometrische Figuren repräsentiert. Dieser physisch-geographische Teil des Modells wird ergänzt durch fixierte Annahmen bezüglich der Bevölkerungsverteilung und der wirtschaftlichen Verhältnisse. Aus der Gesamtheit der Voraussetzungen deduziert er dann das ihnen entsprechende Verkehrsnetz. Zwar fehlt seinen rein verbalen Ableitungen logische Strenge; auch wird man beispielsweise die Annahme, der Verkehr gehorche nur den Gesetzen der Mechanik, sofort verwerfen müssen. Trotzdem ist das Werk für die damalige Zeit richtungweisend gewesen, einmal, weil es die Prinzipien des Modells und der Deduktion in die Verkehrsgeographie einführt, zum andern, weil es eine Anzahl miteinander verbundener Verkehrswege als ein System versteht, dessen Teile in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. Kohl hat damit als erster in der Verkehrsgeographie die formale und funktionale Eigenart der Netz-Erscheinung herausgestellt.

Einen weiteren sehr wesentlichen Beitrag liefert W. Launhardt (1887/88)[13] mit seiner „Theorie des Trassierens". Aus dem zweibändigen Werk wählen wir ein Beispiel aus, das inhaltlich wie methodisch der vorliegenden Arbeit weitgehend entspricht. In dem von Launhardt aufgestellten Satz vom Knotenpunkt werden die Lage der Verkehrsquellen auf einer idealen Ebene, ihre Verkehrsspannungen sowie Bau- und Betriebskosten pro Einheit Weg bzw. Verkehr als bekannt vorausgesetzt; daraus wird mathematisch die ökonomisch optimale Netzgestalt abgeleitet. Gegenüber der Kohl'schen Arbeit sind für diese Konzeption drei Merkmale in besonderem Maße charakteristisch:

---

[12] Siehe Literaturverzeichnis.
[13] Siehe Literaturverzeichnis.

(1) Gegenstand der Untersuchung ist nicht die Ursache eines bestehenden oder sich entwickelnden, sondern die Zweckmäßigkeit eines geplanten Netzes hinsichtlich seiner räumlichen Konfiguration.
(2) Durch die Anwendung der Mathematik wird die Deduktion eindeutig und genau.
(3) Mit der Voraussetzung der idealen Ebene wird die räumliche Varianz der geographischen Erscheinungen aus der Untersuchung ausgeklammert.

Verweist Punkt (1) die Arbeit in den Bereich der Angewandten Geographie, so wird durch Punkt (3), wie wir später sehen werden, ihr geographischer Charakter überhaupt in Frage gestellt.

1897 faßt A. Hettner[14] den Stand der damaligen Verkehrsgeographie zusammen. Dabei macht er zu den hier interessierenden Themen einige grundsätzliche Bemerkungen, die in überraschend hohem Maße den Gedankengängen in der modernen amerikanischen Fachliteratur entsprechen. Wörtlich schreibt er (S. 626): „Man hat den Verkehr passend mit der Blutzirkulation des tierischen Körpers verglichen. Wie dieser erfolgt er nicht in kontinuierlichen Flächen, sondern in einzelnen Adern, die zusammen ein vielverzweigtes Netz bilden. Es ist die Aufgabe der Verkehrsgeographie, dieses Netz der Verkehrsadern aufzufassen; aber sie muß beachten, daß die Adern nicht nur nach ihrer Richtung und ihrer Stellung im Netz, sondern auch nach ihrer Stärke und Art verschieden sind." Und weiter (S. 628): „Die Theorie der Verkehrsnetze ist weiter gefördert, obgleich auch hier noch sehr viel an der Durchführung der Theorie fehlt. Die meisten Betrachtungen beschränken sich zu sehr auf den einzelnen Weg und seine Abhängigkeit von den speziellen Bedingungen der Bodengestalt, . . . (sie) denken kaum daran, diese (Wege) als ein Netz aufzufassen, dessen Gestalt bestimmte Ursachen hat und der Ausdruck einer bestimmten Gesetzmäßigkeit ist. Es ist das große Verdienst von J. G. Kohl . . ." Auch Launhardts Beitrag begrüßt er nachdrücklich und faßt zusammen (S. 629): „So erkennen wir auch hier zunächst durch deduktive Betrachtungen den Weg, auf dem sich die Verkehrsgeographie von einer wesentlich deskriptiven Disziplin, welche nur in einzelnen Fällen die Tatsachen auch erklärt, zu einer Disziplin erhebt, welche grundsätzlich die Auffindung von Gesetzen anstrebt und damit den Disziplinen der physischen Geographie ebenbürtig zur Seite tritt."

Wie für Hettner, so ist auch für F. Ratzel[15] die Untersuchung von Gestalt und Gesetzlichkeit der Verkehrsnetze eine erstrangige Aufgabe der Verkehrsgeographie. Hier ein Beispiel für seine eigenen Überlegungen (1903, S. 491): „Die Wege des Verkehrs streben, ein Netz zu bilden, indem zwei Punkte, die durch einen Weg verbunden sind, mit der Zeit weitere Wegverbindungen ent-

[14] Siehe Literaturverzeichnis.
[15] Siehe Literaturverzeichnis.

wickeln, und indem der erste Weg über seine ursprünglichen End- und Anfangspunkte hinauswächst. Daraus entstehen die vielfachen Ausstrahlungen, Parallelwege und Querverbindungen eines Verkehrsnetzes. Die Maschen dieses Verkehrsnetzes werden nicht bloß immer kleiner und zahlreicher, ihre Gestalt ändert sich auch mit diesem Wachstum ununterbrochen und zwar in der Richtung auf längere Linien und kleinere Winkel. Die Verzweigungen der Verkehrswege verlegen sich immer weiter rückwärts nach dem Ausgangspunkte zu. Früher führte ein Weg so nahe wie möglich an die Punkte hin, nach denen die Zweigwege bestimmt waren, jetzt beginnt die Verzweigung möglichst nahe bei dem Ausgangspunkt."

Wieder überrascht es, daß Ratzel die räumlich-geometrische Netzgestaltung vollständig von ihrer physisch-geographischen Bedingtheit trennt – wie das bereits bei Launhardt der Fall war und von Hettner gebilligt wurde –, offenbar mit dem Ziel, die Struktur des Netzes „an sich" zu ergründen. Diese Trennung wird für die Geographie als Wissenschaft überhaupt von fundamentaler Bedeutung, wenn Ratzel (1903, S. 489) schreibt: „Der Verkehr ... ist eine geographische Tatsache, ..., weil er den Raum und die Hindernisse bewältigen muß, die in der Erdoberfläche liegen; Verkehr ist Kampf mit dem Raum, dem Boden und den Elementen"; und noch schärfer (1923, S. 321): „Was immer zu bewältigen bleibt, auch wo andere natürliche Bedingungen so günstig liegen wie auf dem ebenen, einförmigen Meere, ist der Raum." Damit stellt Ratzel neben die dingliche Erfüllung des Raumes als selbständiges Phänomen den Raum an sich und seine Gesetze. Gegen diese Auffassung wendet sich Hettner (1927, S. 127/128) mit Entschiedenheit. Er spricht von Selbsttäuschung und schreibt: „Der Raum als solcher ist eine Anschauungsform; reale Bedeutung gewinnt er erst durch seinen Inhalt!"

Das hier angeschnittene Problem ist für die gedankliche Grundlegung der vorliegenden Arbeit zu wichtig, als daß es unbeantwortet bleiben dürfte. Es ist klar: Raum wird erst durch Gegenstände geschaffen, gestiftet, um einen philosophischen Ausdruck zu wählen. Umgekehrt ist die Erscheinungsweise von dinglichen Gegenständen immer eine räumliche. Dabei ist es gleichgültig, ob wir Raum als Anschauungsform im Sinne des Kantischen Idealismus oder aber als vom Menschen unabhängig im Sinne des Realismus der modernen Naturwissenschaft auffassen. Dieses Tatbestandes wegen – so verstehen wir Ratzel – muß untersucht werden, wie der dreidimensionale Raum und seine Prinzipien in der geographischen Realität der räumlichen Erdoberfläche und ihrer Erfüllung wirksam werden. Keineswegs aber will er Euklidische Geometrie betreiben, wie Hettner (1927, S. 127) anscheinend vermutet. Der Unterschied zwischen Ratzel und Hettner besteht letztlich darin, daß jener explizit die Bedeutung geometrischer Gesetzlichkeit für die Geographie herausstellt, während dieser sie implizit,

unausgesprochen, vielleicht sogar unerkannt, akzeptiert. Wie anders wäre es sonst zu verstehen, wenn Hettner (1952. S. 147) den Satz der Euklidischen Geometrie, daß die kürzeste Verbindung zweier Punkte die gerade Linie ist, ohne Diskussion auf geographische Probleme anwendet. An anderer Stelle formuliert er (1927, S. 234): „Die meisten geographischen Figuren sind sehr unregelmäßig und darum der mathematischen Behandlung schwer zugänglich. Zwar wird man sie zum Zwecke mancher Untersuchungen auf einfache mathematische Figuren zurückführen können, ... ; aber man muß dabei sorgfältig darauf achten, daß man nicht gerade wesentliche Unregelmäßigkeiten vernachlässigt."

Es gehört zu den legitimen Methoden wissenschaftlicher Arbeit, daß man Einzelphänomene aus dem komplexen Zusammenhang in der Realität herauslöst, d. h. gedanklich isoliert, wenn sie sich in der Isolierung leichter untersuchen lassen. Genau diesen Weg beschreiten Ratzel, Launhardt und Kohl, wenn sie den geographischen Raum so weit fiktiv entleeren, bis ein gegebenes Verkehrsproblem auf die Situation: Verkehrsquellen und ihre Spannungen in der idealen Ebene reduziert ist. Es gelingt ihnen nämlich damit, geometrisch bedingte Kräfte isoliert zu untersuchen. Unnötig zu sagen, daß sie an anderer Stelle die räumliche Varianz der physisch-geographischen Phänomene kombinieren mit den Gesetzen, die der Raum als solcher diktiert.

In der Geschichte der Verkehrsgeographie sind aber auch zeitweilig geradezu konträre Ansichten vertreten worden. So beanstandet Hettner (1897, S. 625 und S. 628), daß viele Geographen in ihren verkehrsgeographischen Betrachtungen den Einfluß nicht-physisch-geographischer Kräfte ausgeklammert hatten und speziell bei Systemen von Verkehrswegen den Netzcharakter und seine Eigenarten übersahen. Ist die erste Unterlassung eine Folge der damaligen Überbetonung der physischen Geographie, so ist die zweite eine unmittelbare Folge der ersten, denn der verbundwirtschaftliche Charakter des Verkehrsnetzes muß in dem Moment aus dem Gesichtsfeld der Betrachtung rücken, in welchem man die anthropogenen Kräfte in der Netzgestaltung anderen Wissenschaften zuweist. Auch in den folgenden Jahren treten noch bedeutende Geographen für diese eng gefaßte Konzeption ein, so etwa F. v. Richthofen (1912, S. 3 und 4): „Die Verkehrsgeographie betrachtet die Ziele und Methoden des Verkehrs in ihren Beziehungen zu den natürlichen Bedingungen der Länder". Die Konsequenz dieser Konzeption spricht er selbst aus: „ ... die Verkehrsgeographie der westländischen Kultur hat in ihren großen Zügen nur noch entfernte Beziehungen zur physischen Erdkunde, sie gestaltet sich mehr und mehr zu einem Zweige der Volkswirtschaft und Weltwirtschaft." Parallele Gedankengänge findet man bei K. Dove (1910, S. 1), Hassert (1931, I, S. 8) und A. Rühl (1918, S. 300/301).

In seinem grundlegenden Aufsatz „Über die Aufgaben der Verkehrsgeographie" (1930) korrigiert O. Schlüter diese einseitige Perspektive im Sinne Ratzels. Auch er erkennt den schwindenden Einfluß physisch-geographischer Faktoren auf das Verkehrsbild, geht dann aber einen wesentlichen Schritt weiter, wenn er schreibt: „Theoretisch wäre das Ende dieses: Die geographischen Widerstände sind für den Verkehr in dem Grade fortgeräumt, daß nur Richtung und Entfernung noch übrig bleiben ... Selbst wenn aber das Ziel erreicht wäre, so würde immer noch eine Art geographischer Wirkungen auf den Verkehr übrig bleiben: die der Richtung, der Lagebeziehungen. Hieraus allein schon ergibt sich, daß Eisenbahn und Dampfschiff, ja, auch das Flugzeug ... sich niemals von den geographischen Bedingungen loslösen können. Und es ergibt sich zugleich die tiefe, grundlegende Bedeutung der Lagebeziehungen." Der Wert theoretischer Konstruktionen sei (S. 307) „ ... nicht nur dort gegeben, wo sie mit der Wirklichkeit übereinstimmen, sondern mindestens ebenso sehr auch dort, wo sie von ihr abweichen. Denn dadurch werden wir auf Faktoren aufmerksam, die außer den zuerst berücksichtigten für die Gestaltung des Netzes maßgebend waren." Schlüter diskutiert dann weiter den Einfluß der Lagebeziehungen auf das Verkehrsnetz und ergänzt (S. 308): „In jedem Fall aber bleibt die besondere Bodengestaltung des Landes als eine zweite große Gruppe von Bedingungen übrig, die die Wirkung der allgemeinen geometrischen Beziehungen in tausend Zügen ummodelt." Also auch hier wieder eine klare Trennung zwischen physischen und geometrischen Bedingungen. Unter den Arbeiten, die nicht nur Grundsatzfragen diskutieren, sondern darüber hinaus mathematisch deduzierte Modelle vorlegen, nimmt schließlich noch der von H. v. Stackelberg 1938 veröffentlichte Aufsatz: „Das Brechungsgesetz des Verkehrs" einen hervorragenden Platz ein. In einer Paralleldarstellung zum Brechungsgesetz des Lichtes zeigt er, daß ein Verkehr, der zwei Gebiete mit unterschiedlichen Frachtsätzen durchqueren muß, bei sonst homogenen Verkehrsverhältnissen genau dann eine ökonomisch optimale Linienführung besitzt, wenn er in beiden Gebieten gradlinig verläuft und nur an ihrer Grenze seine Richtung derart gebrochen wird, daß sich die Cosinus der Ein- und Austrittswinkel an der Grenzlinie umgekehrt proportional wie die Frachtsätze in den beiden Gebieten verhalten.

Hinsichtlich der Grundlagenerörterung der Verkehrsgeographie im allgemeinen und der Theorie der Verkehrsnetze im speziellen kann man den Gang durch die Geschichte mit der Arbeit von H. v. Stackelberg beenden. K. Hassert (1931, S. VII) hält theoretische Diskussionen für verfrüht und fordert an ihrer Stelle Sammlung und Ordnung der verkehrsgeographischen Tatsachen. Dementsprechend ist sein zweibändiges Werk fast ausschließlich ein umfängliches Kompendium gegliederten Materials. Auch die später publizierten Standardwerke

der Verkehrsgeographie bis in die Gegenwart hinein tragen diesen Charakter, so die Veröffentlichungen von H. Hassinger (1933), E. Otremba (1957), G. Fochler-Hauke (1957) und E. Obst (1959), die jedenfalls in Hinblick auf die Theorie der Verkehrsnetze als Rückschritt betrachtet werden müssen. In seiner 1941 als Manuskript abgeschlossenen und 1952 veröffentlichten „Verkehrsgeographie" wiederholt Hettner noch einmal die schon früher vorgetragenen Thesen; 1951 fordert Christaller, man müsse im Rahmen funktionaler Verkehrsgeographie das Verkehrsnetz auf etwaige immanente Prinzipien der Geometrie hin untersuchen.

Ein weit günstigeres Bild bietet sich auf dem Gebiet der theoretischen Arbeit selbst, an welchem die Beiträge von Verkehrsingenieuren entscheidenden Anteil haben. Von den zahlreichen Gedankensplittern, die in den verschiedensten verkehrsgeographischen Publikationen zu finden sind, sollen erst später einige Beispiele gebracht werden; wir beschränken uns hier auf zusammenhängende Darstellungen.

W. Kaufmann entwickelt 1928 eine Methode, welche es erlaubt, für eine gegebene endliche Menge von Punkten jenen Punkt zu berechnen, dessen Summe seiner Entfernungen zu den vorgegebenen Punkten ein Minimum ist.

H. Haufe (1931, S. 13) wählt als Leitsatz für sein Kapitel über die Theorie der Netzgestaltung ein Zitat von F. Dessauer: „Auf geometrisch-deduktivem Wege wollen wir uns die Gestaltungsmöglichkeit von Verkehrsnetzen überlegen. Das geometrische Optimum wird wegen der Singularität der besten Lösungen schon prästabiliert sein." Sein Resultat (S. 15): „Das geometrische Optimum für die Gestaltung von Verkehrsnetzen auf der Erdoberfläche ist ein Maschenwerk von regelmäßigen Sechsecken."

E. Keller betrachtet 1929 die verkehrsgeographischen Grundlagen der deutschen Eisenbahnumwege und führt den Begriff des kommerziell bedingten Umweges ein.

O. Blum (1936, S. 18) unterscheidet zwischen punkt- und flächenförmigen Verkehrsquellen. Er definiert die Verkehrssonne als das radiale Verkehrsfeld zwischen Punkt und (umgebender) Fläche. Er erörtert dann die Verkehrsbeziehungen in einem ganzen System solcher Sonnen.

F. Flörke untersucht 1937, auf den Ergebnissen von Launhardt fußend, die Wirtschaftlichkeit verschiedener Netzschemata auf rein geometrischer Grundlage.

Auch Blum (1946) stellt – allerdings wieder nur verbale – Überlegungen an, unter welchen Umständen ein gegebenes Spannungsfeld durch ein weit- beziehungsweise engmaschiges Netz bedient werden soll, und entwirft entsprechende geometrische Figuren.

In den letzten zehn Jahren ist in den Vereinigten Staaten eine Flut von Publikationen zu geometrischen Problemen im geographischen Raum erschienen. Nur beispielhaft seien hier genannt die Artikel von W. Miehle, 1958 (Verknüpfung von gegebenen Punkten in der Ebene durch ein Netz von minimaler Gesamtlänge), R. E. Quandt, 1960 (Ökonomisch optimale Erweiterung eines Netzes durch die Schaffung neuer Verbindungslinien zwischen Netzknotenpunkten. Methode: linear programming) und M. Beckmann, 1960 (u. a. Erweiterungen und Ergänzungen zum Launhardt'schen Satz vom Knotenpunkt).

In Deutschland lieferte vor allem P. Friedrich (1956) einen bedeutsamen Beitrag, indem er demonstrierte, wie mit Hilfe der Variationsrechnung für gegebene flächenhafte Verkehrsquellen unter Einbeziehung nahezu aller denkbaren Bedingungen und Einschränkungen die unter den gegebenen Umständen wirtschaftlich optimale Verkehrsnetzgestalt bestimmt werden kann. Berechnungen zur Ökonomie regelmäßiger Verkehrsnetze hat R. Hoffmann, 1961, angestellt. Sein Buch bietet zugleich einen – leider unvollständigen – Überblick über den gegenwärtigen Stand der Theorie der Verkehrsnetze.

4. DIE GESTALTUNG VON VERKEHRSNETZEN IM HOMOGENEN RAUM

41. Vorbemerkungen

Im folgenden werden die einfachsten Netzprobleme im homogenen Raum untersucht, ein Thema, mit dem sich außer Launhardt (1887/88), Flörke (1937), Blum (1946) und Beckmann (1960) in jüngster Zeit auch eine Gruppe von Wissenschaftlern am Transportation Center der Northwestern University in Evanston/Chicago beschäftigt hat. Ihre — noch nicht publizierten — Ergebnisse erfassen einen erheblichen Teil des vorliegenden Kapitels, sind jedoch unvollständig. An die Stelle der dort entwickelten Probier- und Näherungsverfahren mittels programmgesteuerter Rechengeräte tritt hier ein einfacher geometrischer Lösungsweg, der die Lösung sofort und genau liefert. Darüber hinaus werden bezüglich des Vier-Punkte-Problems verschiedene Aussagen berichtigt; ferner stellen die topologischen Überlegungen im Zusammenhang mit Netzproblemen von vier und mehr Punkten eine wesentliche Erweiterung dar.

42. Das Drei-Punkte-Problem mit zwei Verkehrsspannungen

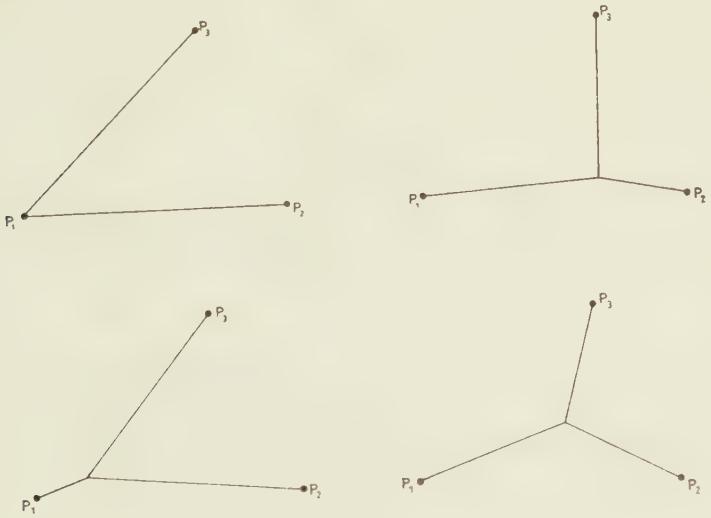
Unter Verwendung der bereits definierten Begriffe betrachten wir zunächst das elementarste aller möglichen Verkehrsprobleme und erweitern dann die Voraussetzungen derart, daß das für Verkehrsnetze konstituierende Merkmal, nämlich die Bündelung von Verkehrsspannungen unterschiedlicher Richtung, in wachsendem Maße erfaßt wird. Gegeben seien in der idealen Ebene die Minimalanzahl von Punkten, die ein Verkehrsspannungsfeld hervorrufen können, d. h. zwei Verkehrsquellen, sowie die durch sie erzeugte Verkehrsspannung. Ohne Beweis sei festgestellt, daß dann die Konstruktion der gradlinigen Verbindungsstrecke die wirtschaftlich optimale Lösung darstellt. —

Es bestehe nun von einem der beiden Punkte eine Verkehrsspannung zu einem dritten Punkt, es sollen zwischen den drei Punkten Wege gebaut werden, die das Kostenproblem optimal lösen. Für seine mathematische Formulierung bezeichnen wir die drei Punkte mit P_1, P_2, P_3, wobei der Punkt P_i $(i = 1, 2, 3)$ im Koordinatennetz durch (x_i, y_i) fixiert sein möge.

Die beiden Verkehrsspannungen seien durch f_{12} und f_{13} gegeben, die Bau- und Betriebskosteneinheiten schließlich durch c bzw. k. Es wäre eine Möglichkeit, die beiden Verkehrsspannungen als getrennte Probleme aufzufassen und jede durch den Bau eines geradlinigen Weges zu befriedigen (V-Lösung). Es fragt sich jedoch, ob es nicht eventuell kostengünstiger wäre, die beiden potentiellen Verkehrsströme für eine gewisse Strecke über einen gemeinsamen Verkehrsweg zu führen und dann erst mittels einer Wegegabelung in Richtung auf ihre Zielorte zu trennen. Diese Variante ist in der Literatur entsprechend der Figur des Verkehrsnetzes als Y-Lösung[16] bekannt. Wie man sich unschwer überlegen kann, gibt es bei einem konkreten Fall unendlich viele solcher Lösungen. Es soll im folgenden eine Methode zur Bestimmung der optimalen Gestalt entwickelt werden.

Jede Lösung ist eindeutig bestimmt durch die Lage ihres Gabelpunktes Q, dessen Koordinaten mit y und x bezeichnet seien. Rückt man Q in die Position des Punktes P_1, so erhält man die oben beschriebene V-Lösung, die sich damit als Spezialfall der Y-Lösung erweist. Figur 4.1 zeigt verschiedene Varianten.

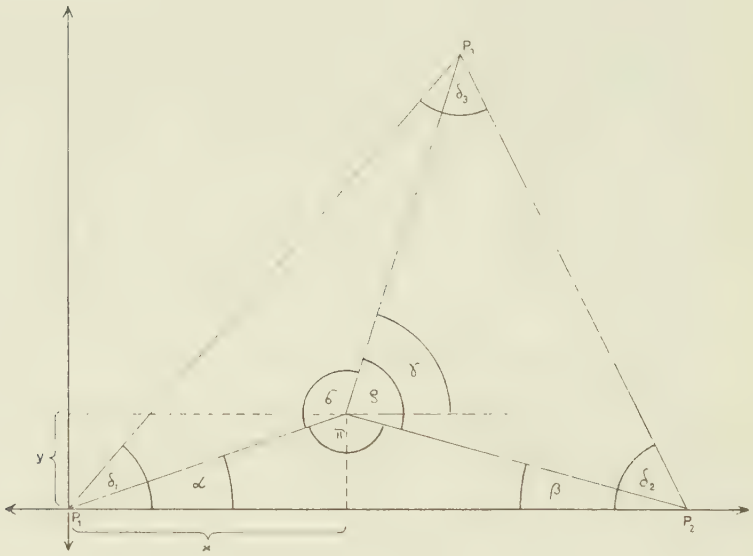
Figur 4.1



[16] Beckmann 1960.

Nach dieser verbal-begrifflichen Aufbereitung des Problems folgt nun die mathematische Formulierung. Die Gesamtkosten C sind eine Funktion der Koordinaten des Gabelpunktes $Q = (x, y)$. Wie der Figur 4.2 zu entnehmen ist, belaufen sie sich auf

$$C(x, y) = (c + f_{12} \cdot k) \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2} + \\ + (c + f_{13} \cdot k) \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} + \\ + [c + (f_{12} + f_{13}) \cdot k] \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} . \qquad (4\text{–}1)$$



Figur 4.2

Zur Vereinfachung der folgenden Rechenoperationen sei das Koordinatennetz so verlagert, daß P_1 im Ursprung und P_2 auf der Abszisse liegt. Dann nehmen die Größen x_1, y_1 und y_2 den Wert Null an und es gilt:

$$C(x, y) = (c + f_{12} \cdot k) \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2} + \\ + (c + f_{13} \cdot k) \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} + \\ + [c + (f_{12} + f_{13}) \cdot k] \sqrt{x^2 + y^2} . \qquad (4\text{–}2)$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen der Gleichung (4–2):

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{(c + f_{12}\cdot k)\,(x - x_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}} + \frac{(c + f_{13}\cdot k)\,(x - x_3)}{\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}} + \frac{[c + (f_{12} + f_{13})k]\,x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4–3}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{(c + f_{12}\cdot k)\,y}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}} + \frac{(c + f_{13}\cdot k)\,(y - y_3)}{\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}} + \frac{[c + (f_{12} + f_{13})k]\,y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,. \tag{4–4}$$

Notwendig für die Existenz eines Minimums ist die Erfüllung der Gleichungen

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = 0\,. \tag{4–5}$$

Die algebraische Entwicklung des Gleichungssystems (4–5) führt zu zwei Polynomen zehnten Grades. Die Eliminierung einer Variablen würde zu einer Resolvente vom Grade 100 führen. Will man von der Inanspruchnahme elektronischer Rechengeräte unabhängig sein, so ist es zwecklos, diesen Weg weiter zu verfolgen.

Dagegen bietet die trigonometrische Interpretation des Gleichungssystems (4–5) einen Lösungsweg, allerdings nur unter Einbeziehung graphisch-geometrischer Hilfsmittel. Wie aus Figur 4.2 zu ersehen ist, läßt sich (4–5) umschreiben in die Form:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -(c + f_{12}\cdot k)\cdot\cos\beta - (c + f_{13}\cdot k)\cdot\cos\gamma + \\ + [c + (f_{12} + f_{13})k]\cdot\cos\alpha = 0 \tag{4–6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = (c + f_{12}\cdot k)\cdot\sin\beta - (c + f_{13}k)\cdot\sin\gamma + \\ + [c + (f_{12} + f_{13})k]\cdot\sin\alpha = 0\,. \tag{4–7}$$

(Es ist klar, daß für unsere Überlegungen nur Lösungen im Definitionsbereich nicht-negativer Wurzeln von Interesse sind.)

Die zweite Gleichung im System (4–6, 7) aufgelöst nach $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{(c + f_{13}\cdot k)\sin\gamma - [c + (f_{12} + f_{13})k]\sin\alpha}{(c + f_{12}\cdot k)} \tag{4–8}$$

Unter Verwendung der Beziehung

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$$

substituieren wir das Ergebnis (4–8) in die erste Gleichung (4–6). Es ergibt sich dann:

$$(c + f_{12}\cdot k)\sqrt{1 - \left(\frac{(c + f_{13}\cdot k)\sin\gamma - [c + (f_{12} + f_{13})k]\sin\alpha}{(c + f_{12}\cdot k)}\right)^2} \\ = [c + (f_{12} + f_{13})k]\cos\alpha - (c + f_{13}\cdot k)\cos\gamma$$

oder

$$-[c + (f_{12} + f_{13})k]^2 \sin^2\alpha + (c + f_{12}\cdot k)^2 -$$
$$- (c + f_{13}\cdot k)^2 \sin^2\gamma + 2(c + f_{13}k)\,[c + (f_{12} + f_{13})\,k] \sin\gamma \sin\alpha =$$
$$= [c + (f_{12} + f_{13})k]^2 \cos^2\alpha - 2[c + (f_{12} + f_{13})\,k]\,(c + f_{13}\cdot k) \cos\alpha \cos\gamma +$$
$$+ (c + f_{13}\cdot k)^2 \cos^2\gamma$$

$$[c + (f_{12} + f_{13})k]^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + (c + f_{13}k)^2 (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) -$$
$$- (c + f_{12}\cdot k)^2 =$$

$$= 2(c + f_{13}\cdot k)\,[c + (f_{12} + f_{13})\cdot k]\,(\sin\alpha \sin\gamma + \cos\alpha \cos\gamma)\,,$$

das bedeutet

$$\cos(\alpha - \gamma) = \frac{[c + (f_{12} + f_{13})k]^2 + (c + f_{13}\cdot k)^2 - (c + f_{12}\cdot k)^2}{2(c + f_{13}\cdot k)\,[c + (f_{12} + f_{13})k]} \qquad (4\text{–}9)$$

Indem wir im System (4–6, 7) die Variablen γ bzw. α eliminieren, erhalten wir in parallelen Rechnungen die beiden dem vorhergehenden analogen Resultate

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{[c + (f_{12} + f_{13})k]^2 + (c + f_{12}\cdot k)^2 - (c + f_{13}\cdot k)^2}{2(c + f_{12}\cdot k)\,[c + (f_{12} + f_{13})\cdot k]} \qquad (4\text{–}10)$$

und

$$-\cos(\beta + \gamma) = \frac{(c + f_{12}\cdot k)^2 + (c + f_{13}\cdot k)^2 - [c + (f_{12} + f_{13})k]^2}{2(c + f_{12}\cdot k)\,(c + f_{13}\cdot k)} \qquad (4\text{–}11)$$

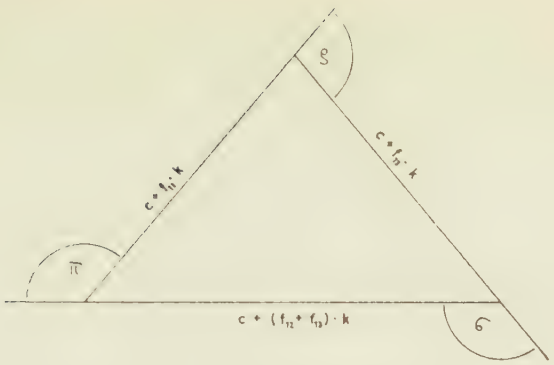
Beachtet man in (4–6, 7) die Vorzeichen, so lassen sich aus Gründen der Symmetrie die Gleichungen (4–10) und (4–11) unmittelbar aus (4–9) ablesen. Figur 4.2 entnehmen wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma &= 180 + \alpha - \gamma = 180 - (\gamma - \alpha) \\ \pi &= 180 - \alpha - \beta = 180 - (\alpha + \beta) \\ \varrho &= \beta + \gamma \end{aligned} \qquad (4\text{–}12)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \gamma) &= \cos(\gamma - \alpha) = -\cos\sigma \\ \cos(\alpha + \beta) &= -\cos\pi \\ \cos(\beta + \gamma) &= \cos\varrho\,. \end{aligned} \qquad (4\text{–}13)$$

Die Gleichungen (4–9), (4–10), (4–11) stehen untereinander in einer interessanten geometrischen Beziehung. Nimmt man nämlich die Werte $(c + f_{12}k)$, $(c + f_{13}k)$ und $(c + (f_{12} + f_{13})\cdot k)$ als die Seiten eines Dreiecks, so erfüllt jede der drei Gleichungen (4–9, 10, 11) für den Komplementärwinkel den Kosinussatz, d. h. das so definierte Dreieck liefert uns die gesuchten Winkel ϱ, σ, π, ohne daß eine explizite Berechnung der Winkel mittels dieser Glei-



Figur 4.3

chungen notwendig wäre. Figur 4.3 zeigt das Dreieck und die Position der Winkel[17]. Die genannte Beziehung garantiert gleichzeitig die Gültigkeit der zu fordernden Gleichung $\varrho + \sigma + \pi = 360°$

Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen: Die notwendigen Bedingungen für ein (relatives) Minimum, wie sie durch das Gleichungssystem (4–5) formuliert werden, ergeben als Forderung, daß die Verbindungsstrecken zwischen dem Gabelpunkt Q und den drei Verkehrsquellen P_1 P_2, P_3 die Winkel ϱ, σ und π bilden.

Ein hier interessierender Minimalpunkt befindet sich entweder im Inneren des Dreiecks $P_1P_2P_3$ oder auf dessen Rand. Im ersteren Falle liegt ein relatives Minimum vor; das Problem soll zunächst unter dieser Voraussetzung behandelt werden. Dann ist im einzelnen zu zeigen, daß ein Punkt Q, der den notwendigen Bedingungen genügt, existiert, daß er Minimum-Punkt der Kostenfunktion ist, und weiter, daß außer ihm kein weiterer derartiger Punkt existiert. Daraus folgt dann, daß die Kostenfunktion genau ein Minimum besitzt, dessen Position durch den Punkt Q eindeutig festgelegt ist.

I. Erfüllt Q die notwendigen Bedingungen, so ist Q Minimalpunkt der Kostenfunktion.

Beweis: Wie sich zeigen wird, ist es nicht erforderlich, die Koordinaten eines solchen Punktes Q zu kennen, weil die hinreichenden Bedingungen von jedem Punkt der Zahlenebene erfüllt werden. Diese Bedingungen sind:

---

[17] Eine Untersuchung aller möglichen Beziehungen der Parameter untereinander sowie der dabei auftretenden Grenzfälle würde eine zu umfangreiche Erörterung auslösen; es sei nur beispielhaft darauf hingewiesen, daß für relativ sehr hohes c alle Winkel nahezu 120° betragen.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} > 0\,, \quad \frac{\partial C}{\partial y^2} > 0 \tag{4–14}$$

und

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0 \tag{4–15}$$

Aus den Gleichungen (4–3) und (4–4) ergeben sich die partiellen zweiten Ableitungen der Kostenfunktion zu:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = (c + f_{12} \cdot k) \frac{(x - x_2) \cdot \frac{-(x - x_2)}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^2} +$$

$$+ (c + f_{13} \cdot k) \frac{\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} - \frac{(x - x_3)^2}{\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}}}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^2} +$$

$$+ [c + (f_{12} + f_{13}) \cdot k] \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = (c + f_{12} \cdot k) \frac{y^2}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} +$$

$$+ (c + f_{13} \cdot k) \frac{(y - y_3)^2}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} +$$

$$+ [c + (f_{12} + f_{13})\, k] \cdot \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} > 0\,. \tag{4–16}$$

Analog ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = (c + f_{12} \cdot k) \frac{(x - x_2)^2}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} + (c + f_{13} \cdot k) \frac{(x - x_3)^2}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} +$$

$$+ [c + (f_{12} + f_{13}) \cdot k] \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} > 0\,. \tag{4–17}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = (c + f_{12} \cdot k) \frac{-(x - x_2) \cdot \frac{y}{\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}}}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^2} +$$

$$+ (c + f_{13} \cdot k) \cdot \frac{-(x - x_3) \cdot \dfrac{(y - y_3)}{\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2}}}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^2} +$$

$$+ [c + (f_{12} + f_{13}) k] \cdot \frac{(-x) \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} =$$

$$= - \frac{(c + f_{12} \cdot k)(x - x_2) y}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} - \frac{(c + f_{13} \cdot k)(x - x_3)(y - y_3)}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} -$$

$$- \frac{[c + (f_{12} + f_{13}) k] x y}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} . \tag{4–18}$$

Da die Wurzeln nur positiv gezogen werden dürfen, gilt generell:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} > 0 \qquad \frac{\partial C}{\partial y^2} > 0 . \tag{4–19}$$

Für die Funktionaldeterminante der zweiten partiellen Ableitungen ergibt sich:

$$D = \left\{ \left[(c + f_{12} \cdot k) \frac{y^2}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} + (c + f_{13} \cdot k) \frac{(y - y_3)^2}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} + \right.\right.$$

$$\left. + [c + (f_{12} + f_{13}) k] \frac{y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \right] \cdot \left[(c + f_{12} \cdot k) \frac{(x - x_2)^2}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} + \right.$$

$$\left.\left. + (c + f_{13} \cdot k) \frac{(x - x_3)^2}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} + [c + (f_{12} + f_{13}) k] \frac{x^2}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3} \right] \right\} -$$

$$- \left\{ (c + f_{12} \cdot k) \cdot \frac{y (x - x_2)}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2})^3} + (c + f_{13} \cdot k) \frac{(x - x_3)(y - y_3)}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} + \right.$$

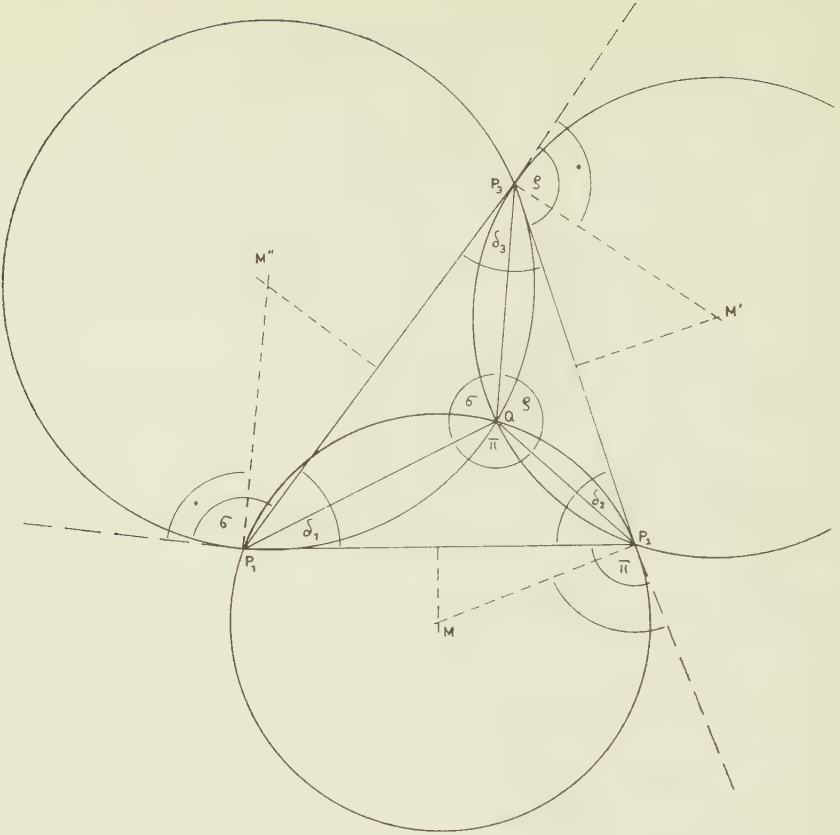
$$\left. + [c + (f_{12} + f_{13}) k] \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\}^2 \tag{4–20}$$

$$= (c + f_{12} \cdot k)(c + f_{13} \cdot k) \frac{[y(x - x_3) - (x - x_2)(y - y_3)]^2}{(\sqrt{(x - x_2) + y^2} \cdot \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2})^3} +$$

$$+ (c + f_{12} \cdot k)[c + (f_{12} + f_{13}) k] \frac{[x \cdot y - y(x - x_2)]^2}{(\sqrt{(x - x_2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^3} +$$

$$+ (c + f_{13} \cdot k)[c + (f_{12} + f_{13}) k] \frac{[x(y - y_3) - y(x - x_3)]^2}{(\sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2})^3} \tag{4–21}$$

d. h. $D > 0$ q.e.d.



Figur 4.4

422. Geometrische Konstruktion der Y-Lösung

Existenz und Eindeutigkeit des Punktes Q ergeben sich aus der folgenden geometrischen Konstruktion.

II. Konstruktion des Punktes Q: Vorausgesetzt werde der Satz aus der elementaren Geometrie, nach welchem die Peripheriewinkel über der Sehne eines Kreises gleich sind. Fassen wir nun die Strecke $\overline{P_1P_2}$ als Sehne eines Kreises auf und wählen den Winkel $\sphericalangle\, P_1QP_2 = \pi$ als Peripheriewinkel, so liegt der Mittelpunkt des zugehörigen Kreises einmal auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{P_1P_2}$ und zweitens auf der Normalen des Kreises durch

P_2. Die Normale wieder steht senkrecht auf der Kreistangente durch P_2, die ihrerseits mit der Sehne $\overline{P_1P_2}$ den Sehnentangentenwinkel π bildet. Nach Konstruktion liegt Q auf dem Kreise, der durch Mittelpunkt M und Radius $\overline{MP_1}$ eindeutig festgelegt ist. — Ebenso können die beiden anderen Dreiecksseiten als Kreissehnen und ϱ und σ als die zugehörigen Peripheriewinkel aufgefaßt werden. Q ergibt sich dann als Schnittpunkt der drei Kreisbögen (Siehe Figur 4.4.)

Die so gefundene Position von Q ist jedoch noch nicht die endgültige Lösung des Problems. Durch die Umformung des algebraischen Gleichungssystems (4–3, 4, 5) in das trigonometrische System (4–6, 7) ging eine wesentliche Information im Rechenprozeß verloren, nämlich die Positionen der drei Punkte P_1, P_2 und P_3. Dementsprechend ist das durch die Gleichungen (4–9, 10, 11) formulierte Ergebnis nur abhängig von den gegebenen Verkehrsspannungen, nicht aber von der Lage der drei Verkehrsquellen. Es ist deshalb möglich, daß die Konstruktion von Q zu einer Position außerhalb des Dreiecks $P_1P_2P_3$ führt, also eine für uns irreale Lösung liefert. Dieser Fall tritt offenbar genau dann ein, wenn eine der folgenden Ungleichungen gilt:

$$\begin{aligned} \delta_1 &> \varrho \\ \delta_2 &> \sigma \\ \delta_3 &> \pi \end{aligned} \qquad (4\text{–}22)$$

Nach Figur 4.3 kann jeder der drei Winkel π, ϱ, σ höchstens 180 Grad haben, je zwei Winkel haben also zusammen mindestens 180 Grad, woraus folgt, daß von den drei Möglichkeiten in (4–22) höchstens eine eintreten kann. Die optimale Lage von Q ist dann identisch mit den Punkten P_1, P_2 oder P_3, je nachdem, welche der Ungleichungen in (4–22) zutrifft. —

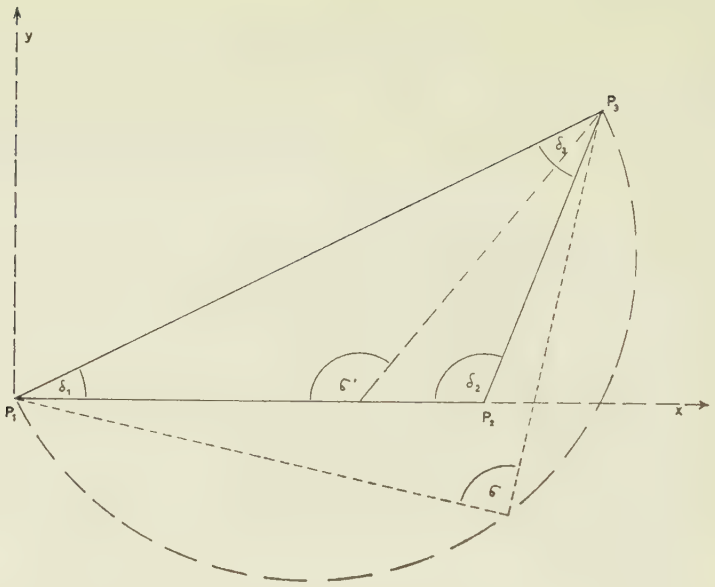
Um diese letzte Aussage zu beweisen, werde — ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit — angenommen, daß Winkel σ kleiner als Winkel δ_2 ist und das gesuchte Minimum auf dem Rande $\overline{P_1P_2}$ liegt.

Wir untersuchen das Verhalten der Kostenfunktion auf der durch die Strecke $\overline{P_1P_2}$ definierten Geraden, also auf der x-Achse. Dann ist $y = 0$ und die Kostenfunktion lautet:

$$C(x) = (c + f_{12} \cdot k)\,(x_2 - x) + (c + f_{13} \cdot k)\,\sqrt{(x_3 - x)^2 + y_3^2} + \\ + [c + (f_{12} + f_{13})k]\,x\,. \qquad (4\text{–}22\,\text{a})$$

Aus $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = -(c + f_{12} \cdot k) + [c + (f_{12} + f_{13})k] - \dfrac{(c + f_{13}k)\,(x_3 - x)}{\sqrt{(x_3 - x)^2 + y_3^2}}$

und $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} = 0$ ergibt sich nach Figur 4.4a



Figur 4.4a

$$\frac{x_3 - x}{\sqrt{(x_3 - x)^2 + y_3^2}} = \frac{f_{13} \cdot k}{c + f_{13} \cdot k} = 1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k} = -\cos\sigma'. \qquad (4\text{–}22\,\text{b})$$

Die zweimal differenzierte Kostenfunktion lautet:

$$\frac{\mathrm{d}^2 C}{\mathrm{d}x^2} = -(c + f_{13} \cdot k)\left[\frac{-((x_3 - x)^2 + y_3^2) + (x_3 - x)^2}{[(x_3 - x)^2 + y_3^2] \cdot \sqrt{(x_3 - x)^2 + y_3^2}}\right]$$

$$\text{d. h. } C''(x) > 0\,. \qquad (4\text{–}22\,\text{c})$$

Da hier nur die positive Wurzel interessiert, ist die zweite Ableitung permanent Null, so daß das Minimum der Kostenfunktion auf der x-Achse eindeutig durch jenen Punkt gegeben ist, in welchem $\cos\sigma' = -\left(1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k}\right)$ gilt. Wir machen jetzt Gebrauch von der Voraussetzung

$$\cos\delta_2 < \cos\sigma = -\frac{[c + (f_{12} + f_{13})k]^2 + (c + f_{13} \cdot k)^2 - (c + f_{12} \cdot k)^2}{2\,[c + (f_{12} + f_{13})k](c + f_{13} \cdot k)}\,. \qquad (4\text{–}22\,\text{d})$$

Schreibt man $\cos\sigma$ als Funktion vom Parameter f_{12} in der Form

$$\cos\sigma = -\frac{\{c^2 + 4cf_{13} \cdot k + 2f_{13}^2 \cdot k^2\} + \{2f_{13} \cdot k^2\} f_{12}}{\{2c^2 + 4cf_{13} \cdot k + 2f_{13}^2 \cdot k^2\} + \{2ck + 2f_{13} \cdot k^2\} f_{12}} = -\frac{a + b \cdot f_{12}}{d + e \cdot f_{12}}$$

und berücksichtigt $a < d$ und $b < c$, so ergibt sich, daß $\cos\sigma$ für $f_{12} = 0$ den Wert $-\left(1 - \frac{c^2}{2(c + f_{13} \cdot k)^2}\right)$ annimmt und dann mit wachsendem f_{12} gegen

$$-\frac{f_{13} \cdot k}{c + f_{13} \cdot k} = -\left(1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k}\right)$$

strebt.

Es gilt also in jedem Falle, d. h. unabhängig vom Parameter f_{12}:

$$\cos\sigma \leq -\left(1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k}\right)$$

und wegen $\delta_2 > \sigma$:

$$\cos\ \delta_2 < -\left(1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k}\right).$$

Aus $\cos\sigma' = -\left(1 - \frac{c}{c + f_{13} \cdot k}\right)$ folgt dann $\cos\delta_2 < \cos\sigma'$, d. h. $\delta_2 > \sigma'$.

In Worten: Der gesuchte Minimalpunkt liegt auf der x-Achse rechts von P_2. Da die Kostenfunktion (wegen $C''(x) > 0$ für alle x) vom Minimalpunkt aus nach beiden Seiten monoton wächst, nimmt die Kostenfunktion im abgeschlossenen Intervall $\overline{P_1 P_2}$ ihr Minimum in P_2 an, was zu beweisen war. —

43. Vier Quellpunkte mit zwei Verkehrsspannungen

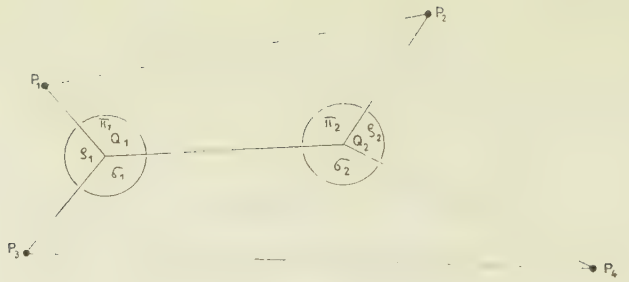
Eine folgerichtige Erweiterung der in Abschnitt 42 betrachteten Situation mit drei Verkehrsquellen und zwei Verkehrsspannungen ist die Annahme, daß zwei Verkehrsspannungen mit je zwei Verkehrsquellen unabhängig voneinander, d. h. mit insgesamt vier Verkehrsquellen gegeben sind. Während die nur von den Betriebskosten ausgehende Rechnung zwei direkte Verbindungsstrecken fordert, wird die Gesamtkostenrechnung überprüfen müssen, ob nicht die beiden Verkehrsströme für einen Teil ihres Weges durch eine gemeinsame Verkehrsstrecke gebündelt werden sollten. Figur 4.5 zeigt die beiden Verkehrsspannungen und das durch das Prinzip der Bündelung erzeugte Netz. Ob sich eine Bündelung der beiden Verkehrsströme überhaupt empfiehlt, wird erst später untersucht.

Seien P_1, P_2 und P_3, P_4 die den Verkehrsspannungen f_{12} und f_{34} entsprechenden Punktepaare, sowie Q_1 und Q_2 die beiden Gabelpunkte, in welchen der Verkehr gebündelt wird. Die Koordinaten der vier Fixpunkte seien durch

$$P_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i / i = 1, 2, 3, 4),$$

die der variablen Punkte durch

$$Q_i = (x_i, y_i / i = 1,2)$$



Figur 4.5

gegeben, c sei wiederum der Baukostenindex. Dann lautet die Kostenfunktion:

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, y_1, y_2) = (c + f_{12} \cdot k)\,[&\sqrt{(\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{y}_1 - y_1)^2} + \\ &+ \sqrt{(\bar{x}_2 - x_2)^2 + (\bar{y}_2 - y_2)^2}\,] + \\ &+ (c + f_{34} \cdot k)\,[\sqrt{(\bar{x}_3 - x_1)^2 + (\bar{y}_3 - y_1)^2} + \\ &+ \sqrt{(\bar{x}_4 - x_2)^2 + (\bar{y}_4 - y_2)^2}\,] + \\ &+ [c + (f_{12} + f_{34})k] \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \end{aligned} \tag{4–24}$$

Von dieser Gleichung ist unschwer abzulesen, daß ihre partiellen Ableitungen zu zwei Gleichungssystemen führen, von denen jedes dem schon diskutierten Fall dreier Verkehrsquellen mit zwei Verkehrsspannungen entspricht[18]. Die beiden Teilprobleme werden repräsentiert einmal durch das Punktetripel $P_1P_3Q_2$ mit den Verkehrsströmen f_{12}, f_{34} und $(f_{12} + f_{34})$ sowie dem Gabelpunkt in Q_1, zum anderen durch das Punktetripel $Q_1P_2P_4$ mit den gleichen Verkehrsströmen und dem Gabelpunkt in Q_2. Indem man die gegebenen Koordinaten und Parameter in die Gleichungen (4–9), (4–10) und (4–11) einsetzt, erhält man die sechs Winkel

$$\varrho_i, \sigma_i, \pi_i \quad (i = 1,2) \tag{4–25}$$

der beiden Gabeln in Q_1 und Q_2.

Die Konstruktion der beiden Gabelpunkte gelingt wieder geometrisch, und zwar durch doppelte Anwendung des Satzes von der Gleichheit der Peripheriewinkel über einer Kreissehne. Es sei $\overline{P_1P_3}$ die Sehne eines Kreises K_{13} und Winkel $\sphericalangle\, P_1Q_1P_3 = \varrho_1$ Peripheriewinkel über dieser Sehne. Die

[18] Die dort erzielten Resultate (insbesondere über relative Minima, über hinreichende Minimalbedingungen und Minima auf dem Rande) sind hier wie auch in späteren Untersuchungen jeweils sinngemäß zu übertragen.

Konstruktion von K_{13} wurde bereits im Abschnitt 42 gezeigt. Die Gerade durch Q_1 und Q_2 teilt ϱ_1, da keiner der drei Winkel $\varrho_1, \pi_1, \sigma_1$ größer als 180 Grad sein kann, in die beiden Winkel ϱ_1' und ϱ_1'': $\varrho_1 = \varrho_1' + \varrho_1''$, und es ist

$$\begin{aligned} \varrho_1' &= 180 - \sigma_1 \\ \varrho_1'' &= 180 - \pi_1 \,. \end{aligned} \tag{4–26}$$

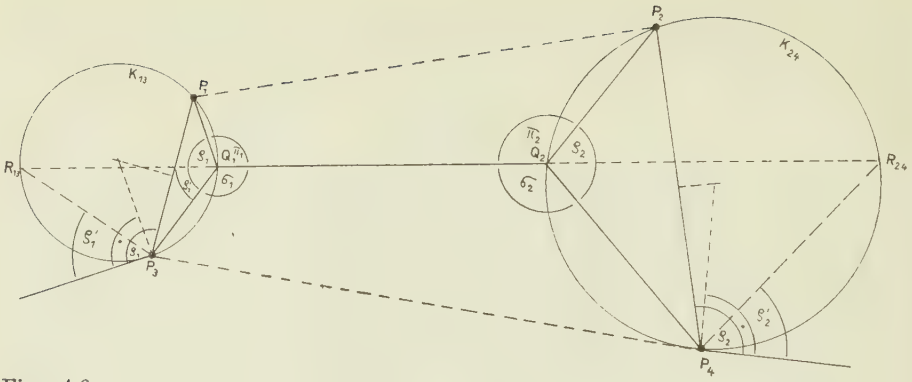
Es sei ξ_1 Sehnentangentenwinkel in P_3, d. h. $\xi_1 = \varrho_1$. Zerlegen wir ξ_1 in die beiden Teilwinkel ξ_1', ξ_1'', wobei $\xi_1' = \varrho_1'$ und $\xi_1'' = \varrho_1''$ sein sollen, so wird durch den dabei entstehenden freien Schenkel eine neue Sehne in den Kreis gelegt: wir bezeichnen sie durch ihre Endpunkte $\overline{P_3 R_{13}}$. Faßt man Q_1 zunächst noch als variablen Punkt auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{P_1 P_3}$ auf, so sind alle Winkel $\sphericalangle R_{13} Q_1 P_3$ als Peripheriewinkel über der Sehne $\overline{P_3 R_{13}}$ gleich ϱ_1', jede Gerade durch Q_1 und Q_2 muß deshalb, soll sie den Winkel ϱ_1 wie vorgeschrieben in die Teilwinkel $\sphericalangle R_{13} Q_1 P_3 = \varrho_1'$ und $\sphericalangle R_{13} Q_1 P_1 = \varrho_1''$ zerlegen, durch den Punkt R_{13} verlaufen.

Eine symmetrische Überlegung liefert für die Strecke $\overline{P_2 P_4}$ einen Kreis K_{24} mit einem R_{13} analogen Punkt R_{24}. Die gesuchten Punkte Q_1 und Q_2 sind die Schnittpunkte der Geraden $\overline{R_{13} R_{24}}$ mit den beiden Kreisbögen über $\overline{P_1 P_3}$ bzw. $\overline{P_2 P_4}$. Figur 4.6 demonstriert die Konstruktionsmethode, Figur 4.7 zeigt verschiedene Sonderfälle.

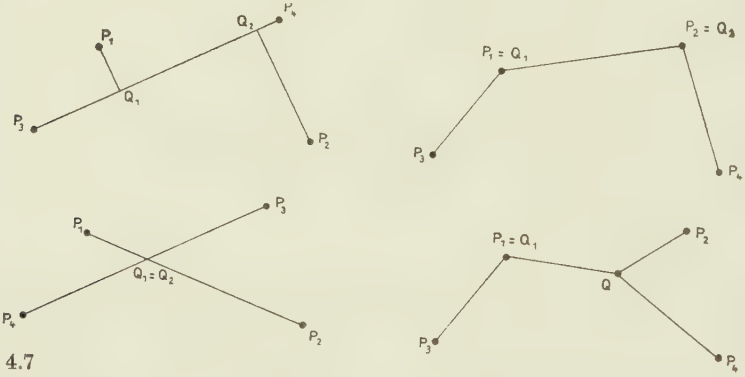
Damit ist das Problem jedoch nicht erschöpfend behandelt. Denn falls die beiden Verkehrsspannungen sich nicht überschneiden, müssen die Gesamtkosten für das oben konstruierte Verkehrsnetz mit denen der Direktverbindung der beiden Punktepaare verglichen werden. Diese belaufen sich auf

$$\begin{aligned} C' = {} & (c + f_{12} \cdot k) \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2} \\ & + (c + f_{34} \cdot k) \sqrt{(\bar{x}_3 - \bar{x}_4)^2 + (\bar{y}_3 - \bar{y}_4)^2} \,. \end{aligned} \tag{4–27}$$

Schließlich muß noch auf ein Problem topologischer Natur hingewiesen werden. Figur 4.8 zeigt, daß im Falle sich überschneidender Verkehrsspannungen zwei Verkehrsnetztypen für den mathematischen Ansatz in Frage kommen, die voneinander grundsätzlich verschieden sind. Man sieht das — beispielsweise — daran, daß in dem einen Netz P_1 und P_2 zur gleichen Gabel gehören, während sie in dem anderen von verschiedenen Gabeln bedient werden. Die Schwierigkeit besteht nun darin, daß man sich bereits vor der Aufstellung der Kostenrechnung für die eine oder andere Alternative entscheiden muß, so daß im Zweifelsfall die Qualität der beiden Varianten nur durch getrennte Kostenrechnungen verglichen werden kann. Die hier aufgezeigte topologische Problematik wird noch öfters in Erscheinung



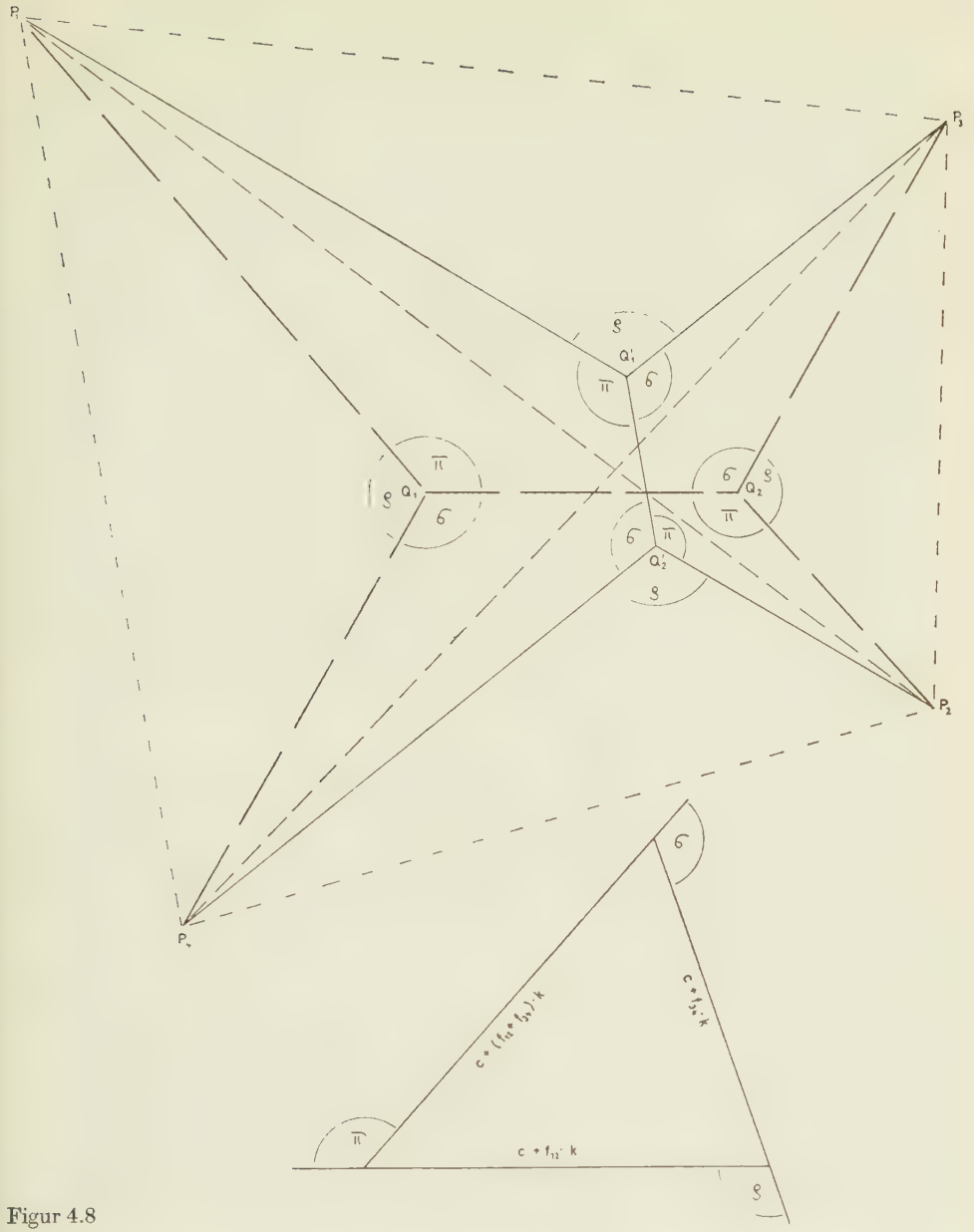
Figur 4.6



Figur 4.7

treten, in der Literatur wurde sie bislang kaum gesehen, geschweige denn gelöst.

Zu diesem Abschnitt sei noch am Rande eine Konsequenz vermerkt, die demonstriert, wie sehr die mathematisch-geometrischen Resultate von den Vermutungen des „gesunden" Menschenverstandes abweichen. Liegen die Baukosten im Verhältnis zu den Betriebskosten sehr hoch, so ist die herkömmliche vierstrahlige Wegekreuzung noch nicht einmal dann die wirtschaftlich optimale Lösung, wenn die beiden Verkehrsspannungen und die sie bedienenden Verkehrswege senkrecht zueinander verlaufen. Denn die an der Kreuzung entstehenden Winkel betragen 90°, während nach Abschnitt 421 erst Winkel in der Nähe von 120° ein ökonomisch optimales Netz erzeugen würden. Daraus folgt aber, daß dieses von zwei Gabeln gebildet wird. Figur 4.8 bringt eine Gegenüberstellung der beiden Netzgestalten als Lösungen eines gegebenen Verkehrsproblems.



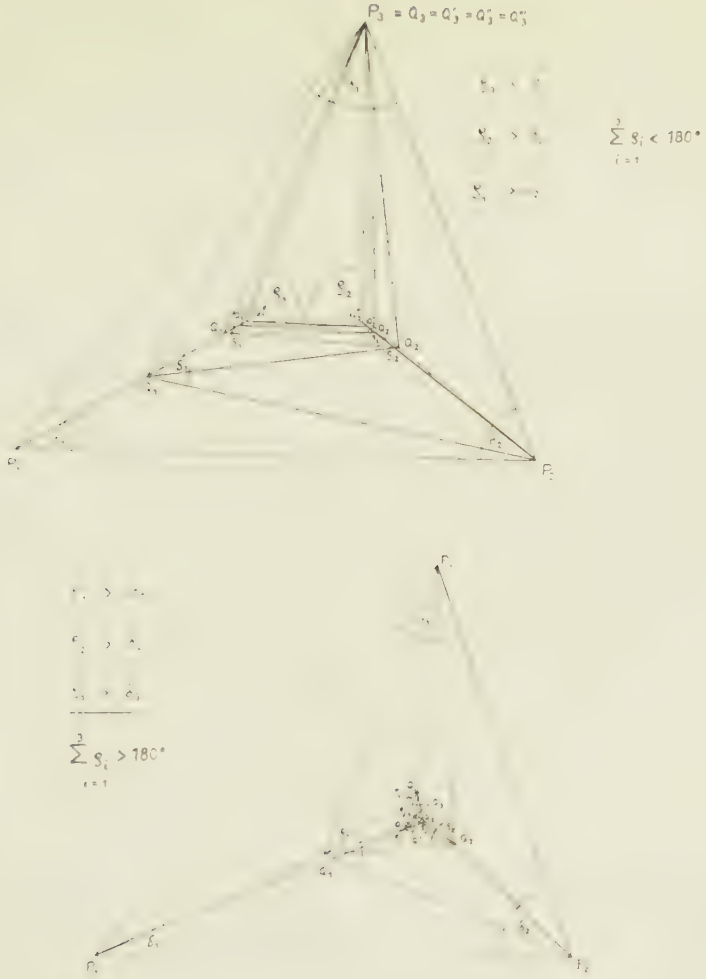
Figur 4.8

44. Das Drei-Punkte-Problem mit drei Verkehrsspannungen

Der einfachste Fall für ein Spannungsfeld bestehend aus drei Verkehrsspannungen wird durch drei Punkte konstituiert, bei denen jeder mit jedem in Verkehrsspannung steht. Läßt man eine der drei Spannungen unberücksichtigt, so reduziert sich das Problem auf den in Abschnitt 42 behandelten Fall. Aus dieser Tatsache kann man einen Prozeß ableiten, in welchem schrittweise das als erste Schätzung angenommene Netz geradliniger Verbindungen wirtschaftlicher gestaltet wird. Es sei also $P_1P_2P_3$ das Dreieck der gegebenen Verkehrsquellen, f_{12}, f_{13}, f_{23} die zugehörigen Verkehrsspannungen und die Direktverbindungen $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$, $\overline{P_2P_3}$ ein erster Netzentwurf. Das Teilproblem, die Verkehrsspannungen f_{12} und f_{13} zu befriedigen, wird gemäß der in Abschnitt 42 entwickelten Methode gelöst. Falls der Lösungspunkt Q_1 nicht mit P_1 zusammenfällt, so stellt das Netz bestehend aus der soeben konstruierten Gabel mit dem Gabelpunkt in Q_1 plus der Direktverbindung $\overline{P_2P_3}$ eine echte wirtschaftliche Verbesserung gegenüber dem vorhergehenden Netz dar. Genau so ersetzen wir anschließend die beiden Netzglieder $\overline{Q_1P_2}$ und $\overline{P_2P_3}$ mit den potentiellen Verkehrsströmen f_{12} und f_{23} durch die entsprechende optimale Gabellösung mit dem Gabelpunkt Q_2. Es werden dann die Netzglieder $\overline{Q_1P_3}$ und $\overline{Q_2P_3}$ durch die optimale Gabel mit Gabelpunkt Q_3 ersetzt, weiter die Glieder $\overline{Q_1Q_2}$ und $\overline{Q_1Q_3}$ durch die ihnen entsprechende Gabel mit Gabelpunkt Q_1', der anschließend mit P_1 verbunden wird, und so fort (Siehe Figur 4.9).

Diese Methode der sukzessiven Approximation führt mit Sicherheit zu einer Netzgestalt, deren Gesamtkosten minimal sind. Ob dieses Minimum das einzig existierende ist, bleibt im Moment unentschieden. Die Antwort ist insofern nur von mathematisch-theoretischem Interesse, als es in der Praxis nicht notwendig ist, das beschriebene iterative Verfahren durchzuführen. Folgende Überlegungen ermöglichen es, die gesuchte Lösung direkt und genau zu erzielen:

Das allgemeine Netzmodell muß von der Annahme ausgehen, daß die beiden von jedem Quellpunkt auslaufenden Verkehrsströme zunächst gebündelt einen gemeinsamen Weg benutzen, bevor sie sich in Richtung auf ihre Zielpunkte trennen. Die daraus resultierende Netzgestalt ist in Figur 4.10 dargestellt. Es ist eine Kombination von drei Gabeln, deren freie Äste sich zu einem Dreieck zusammenfügen. Mit der Angabe der drei Gabelpunkte Q_1, Q_2, Q_3, die zugleich die Eckpunkte dieses Dreiecks sind, ist die Netzgestalt eindeutig festgelegt.

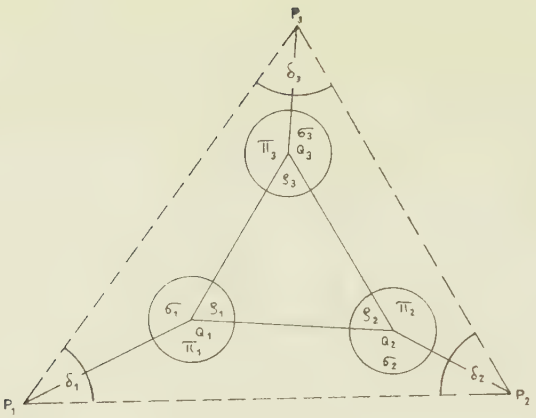


Figur 4.9

In einem angenommenen Koordinatensystem seien die sechs Netzpunkte wie folgt definiert:

$$P_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$Q_i = (x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$



Figur 4.10

Dann lautet die zugehörige Kostenfunktion:

$$
\begin{aligned}
C(x_i, y_i/i = 1, 2, 3) = {} & [c + (f_{12} + f_{13})k] \sqrt{(\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{y}_1 - y_1)^2} + \\
& + [c + (f_{12} + f_{23})k] \sqrt{(\bar{x}_2 - x_2)^2 + (\bar{y}_2 - y_2)^2} + \\
& + [c + (f_{13} + f_{23})k] \sqrt{(\bar{x}_3 - x_3)^2 + (\bar{y}_3 - y_3)^2} + \\
& + (c + f_{12} \cdot k) \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \\
& + (c + f_{13} \cdot k) \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} + \\
& + (c + f_{23} \cdot k) \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \ .
\end{aligned}
$$

Die sechs partiellen Ableitungen erster Ordnung gruppieren sich in drei voneinander unabhängige Gleichungssysteme, deren jedes dem Typ des in Abschnitt 42 geschilderten Verkehrsproblems entspricht[19]. Demgemäß erhält man als Resultat genau die neun Winkel, die von den Gabeln in Q_1, Q_2 und Q_3 gebildet werden. Es wird sich später erweisen, daß die Summe der Innenwinkel $\sum_{i=1}^{3} \varrho_i$ im allgemeinen nicht 180° beträgt, doch soll uns das im Moment hier nicht interessieren. Anhand der in Figur 4.10 eingetragenen Symbole wollen wir jetzt die besagten neun Winkel einer eingehenden Dis-

[19] Bei der Annahme von drei Verkehrsspannungen ist zwar die in Rechnung zu stellende Verkehrsbelastung für die einzelnen Netzglieder eine andere als im Falle des Abschnitts 42, jedoch bleibt der dort vorgeführte Rechenprozeß der gleiche.

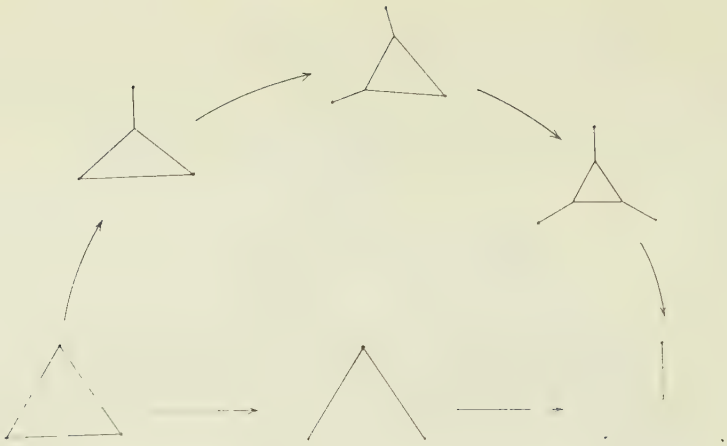
kussion unterziehen. Vorher muß allerdings noch die Frage geklärt werden, welche topologisch unterschiedlichen Netztypen[20] für die optimale Netzgestalt in Frage kommen. Es sei noch betont, daß die folgende Entwicklung der topologischen Typen nur dem Verständnis des Problems dienen soll, keineswegs aber Anspruch auf mathematische Strenge erhebt.

441. Topologische Typen der Lösung

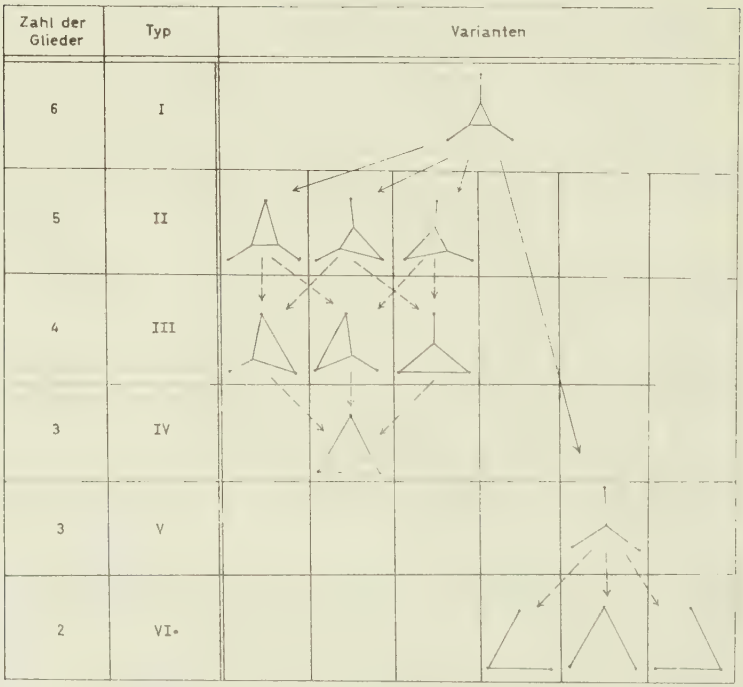
Die beiden „extremen" Typen sind offenbar durch die △-(Delta-)lösung bzw. die Y-Lösung gegeben, denn die erstere ist betriebskostenmäßig das Optimum, während die zweite die optimale Lösung ist, wenn man nur die Baukosten berücksichtigt. Diese Feststellungen sind beide evident, so daß sich ein Beweis erübrigt. Im allgemeinen sind weder die Bau- noch die Betriebskosten so relativ unerheblich, daß sie auf die optimale Netzgestalt keinen Einfluß ausüben. So erhebt sich die Frage, ob nicht zwischen den beiden Extremfällen weitere topologische Typen existieren. Der △-Typ ist nicht nur der betriebskostenmäßig rentabelste, sondern zugleich auch der baukostenmäßig teuerste Typ, falls man überflüssige bzw. sinnlose Netzgestalten aus der Betrachtung ausschließt. Wir beginnen deshalb mit der △-Lösung und reduzieren sie schrittweise durch Verkürzung ihrer Weglänge. Dabei kann man auf zwei verschiedene Weisen vorgehen: einmal, indem man jeweils zwei von einem Punkt ausgehende separate Wege durch eine Gabel ersetzt, oder aber, indem man entbehrliche Glieder aus dem Netzmodell streicht. Ist irgendeine der so entstehenden Figuren hinsichtlich ihrer Topologie nicht symmetrisch in Bezug auf die drei Punkte P_1, P_2, P_3, so müssen alle drei Alternativen berücksichtigt werden. Figur 4.11 zeigt die geometrische Entwicklung, wobei für topologisch asymmetrische Konfigurationen jeweils ein Repräsentant gewählt wurde. Auf die Existenz anderer, insbesondere sich verzweigender und zyklischer Entwicklungsketten sei hier nur hingewiesen. Figur 4.12 stellt die verschiedenen Netztypen mit ihren Alternativen tabellarisch zusammen.

---

[20] Wir bezeichnen hier als topologischen Typus den allgemeinen Repräsentanten einer Menge von Verkehrsnetzen, die, als Punktmengen im zweidimensionalen Euklidischen Raum aufgefaßt, durch umkehrbar eindeutige und in beide Richtungen stetige Abbildungen ineinander überführbar sind. Netze, die in diesem Sinne zur gleichen Menge gehören, bezeichnen wir als topologisch äquivalent, andernfalls als topologisch verschieden. Mit der Topologie eines Netzes ist dementsprechend seine Zugehörigkeit zu einer bestimmten Äquivalenzklasse gemeint.



Figur 4.11



Figur 4.12

442. Die Interdependenz von topologischem Typus und gegebenen Winkelrelationen

Ist ein konkretes Verkehrsnetzproblem mit drei Verkehrsquellen und drei Verkehrsspannungen gegeben, so läßt sich von vornherein sagen, daß die gesuchte optimale Netzgestalt einer der zwölf in Figur 4.12 dargestellten Netzformen[21] topologisch äquivalent sein muß. Jede von ihnen kann durch stetige Verformung aus dem Typ I (siehe Figuren 4.10 und 4.12) abgeleitet werden. Nach Abschnitt 421 sind uns die neun Netzwinkel dieses Typs bekannt; ebenfalls bekannt sind uns die drei Innenwinkel des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Die Ermittlung der für das gegebene Problem optimalen Netzgestalt erfolgt in zwei Schritten: Zuerst soll durch Zuordnung der verschiedenen Relationen der zwölf Winkel zu den verschiedenen topologischen Typen ein Schema konstruiert werden, das es erlaubt zu entscheiden, welcher dieser Typen der gesuchten optimalen Netzform topologisch äquivalent ist. Sodann soll kurz ausgeführt werden, wie die Netzform, deren topologische Gestalt nun festliegt, graphisch zu konstruieren ist.

Es sei noch einmal daran erinnert, daß Figur 4.10 das allgemeine Netzmodell darstellt, aus welchem sich durch stetige Verformung alle anderen Netztypen ableiten lassen, und weiter, daß uns alle in der Figur 4.10 eingetragenen Winkel — sei es unmittelbar oder aber auf Grund der früher berechneten Formeln — bekannt sind. Diese allgemeinste Netzform wurde in Figur 4.12 als Typ I bezeichnet. Für die Lösung kommt er nur dann in Frage, wenn die Summe der Innenwinkel des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ 180° beträgt:

$$\sum_{i=1}^{3} \varrho_i = 180° \text{ [22]}$$

Es gibt in diesem Falle unendlich viele Lösungen. Unter ihnen sind hervorzuheben die Sonderfälle

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 \qquad \text{(Typ V)}$$

$$Q_i = P_i \quad / \quad i = 1 \text{ oder } 2 \text{ oder } 3 \qquad \text{(Typ II)}$$

$$\begin{matrix} Q_i = P_i \\ Q_j = P_j \end{matrix} \quad / \quad i, j = 1, 2 \text{ oder } 1, 3 \text{ oder } 2, 3 \qquad \text{(Typ III)}$$

$$Q_i = P_i \quad / \quad i = 1, 2, 3 \qquad \text{(Typ IV)}$$

[21] Die Varianten eines Typs sind topologisch nicht mehr äquivalent, sobald man verlangt, daß die Abbildungen (vergl. Fußnote 20) jeden Eckpunkt P in sich überführen.

[22] Da ein solcher Fall praktisch nicht auftritt, wurde auf die Beweisführung der folgenden Aussagen verzichtet.

Während der erste Sonderfall durch maximale Schrumpfung des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ entsteht, ergeben sich alle anderen bei maximaler Dehnung dieses Dreiecks innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen, die durch das Dreieck $P_1P_2P_3$ gezogen sind. Den Ausschlag geben dabei die jeweiligen Winkel der beiden Dreiecke. — Im folgenden soll der besprochene Typ wahlweise den Typen II oder V zugeordnet werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Beziehung $\sum_{i=1}^{3} \varrho_i = 180°$ in der Praxis auftritt, ist gleich Null. —

Ist die Summe der Innenwinkel ϱ_i $(i = 1, 2, 3)$ größer als 180°, so kann das hypothetisch angenommene Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ entsprechend der zu Beginn des Abschnitts 44 entwickelten Iteration sukzessive verbessert werden. Jeder Schritt der Iteration führt zu einem neuen Dreieck, das kleiner als das vorhergehende und diesem eingelagert ist. Da keines der Dreiecke der Forderung

$$\sum_{i=1}^{3} \varrho_i > 180° \tag{4–29}$$

genügen kann, muß der Prozeß notwendig in einem Punkte konvergieren, mithin erhalten wir für die Voraussetzung (4–29) den topologischen Typ V.

Es bleibt noch die Möglichkeit

$$\sum_{i=1}^{3} \varrho_i < 180° \tag{4–30}$$

zu diskutieren. Diese Voraussetzung bedeutet für das allgemeine Netzmodell der Figur 4.10, daß mindestens einer der drei Innenwinkel des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ größer als der ihm vorgeschriebene Wert ist. Sei dies etwa der Winkel an Q_i, das Gesamtnetz kann dann dadurch ökonomischer gestaltet werden, daß man den Punkt Q_i in Richtung P_i soweit verschiebt, bis der Winkel $\sphericalangle\, Q_jQ_iQ_k$ den Wert ϱ_i angenommen hat. Das neue Dreieck mit seiner Winkelsumme von 180° genügt nun wiederum in mindestens einem Winkel nicht den gestellten Forderungen, denn

wegen $$\sum_{i=1}^{3} \varrho_i < 180°$$

ist $\varrho_k = \sphericalangle\, Q_iQ_kQ_j$ $(k = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq k,\ i \neq k)$ unmöglich. Sei etwa

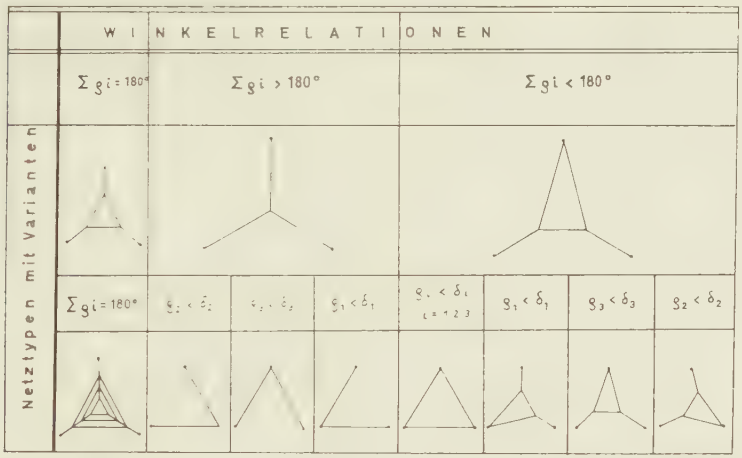
$$\varrho_j < \sphericalangle\, Q_iQ_jQ_k\,, \tag{4–31}$$

so verschiebt man wieder den Punkt Q_j soweit in Richtung P_j, bis in (4–31) das Gleichheitszeichen gilt. Die Iteration kann man so lange fortsetzen, bis die sukzessive Vergrößerung des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ in mindestens einem seiner Eckpunkte den entsprechenden Eckpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$ erreicht hat.

Beachtet man, daß die Typen III und IV als Sonderfälle des Typus II angesprochen werden können, so ist klar, daß die beschriebene Iteration zum Netztyp II führt. Der Sonderfall des Typ IV (= Typ Δ) tritt genau dann ein (siehe Figur 4.10), wenn gilt:

$$\varrho_i < \delta_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3 .$$

Die Kombination $\varrho_i > \delta_i$, $\varrho_j > \delta_j$, $\varrho_k < \delta_k$ führt zu dem Typ II; gilt nur für ein Winkelpaar (δ, ϱ): $\varrho > \delta$, so kommen sowohl Typ II als auch Typ III in Frage. Damit ist für den Typ III ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium gefunden. Den angestellten Untersuchungen zufolge scheint ein solches — wenigstens auf der Basis der zwölf Winkel — auch nicht zu bestehen. Es wird sich jedoch zeigen, daß das auch nicht erforderlich ist, weil sich der Typ III bei der Konstruktion des Typus II sozusagen mechanisch als ein Sonderfall desselben ergibt. — Die gewonnenen Resultate sind in Figur 4.13 tabellarisch zusammengestellt.



Figur 4.13

443. Graphische Konstruktion der Lösung

Alle topologischen Netztypen lassen sich mit Hilfe der bereits in früheren Abschnitten entwickelten Methoden graphisch-geometrisch konstruieren. Der Typ VI ist ein Sonderfall des Typus V, dessen Konstruktion in Abschnitt 442 vorgeführt wurde. Bezüglich des Typ I sei auf jenen Sonderfall verwiesen, der mit dem Typ II äquivalent ist: aus ihm lassen sich mittels der

Bildung ähnlicher Dreiecke durch Parallelverschiebung mühelos alle Lösungen des Typ I gewinnen. Der Typus II schließlich kann als Sonderfall des in Abschnitt 43 behandelten Verkehrsproblems interpretiert werden, und zwar durch die einschränkende Voraussetzung, daß entweder $P_1 = P_3$ oder $P_2 = P_4$ gilt. Beachtet man nur, wie groß die Verkehrsbelastung der einzelnen Netzglieder ist, so macht die Einordnung der dritten Verkehrsspannung in den Rechenprozeß zur Bestimmung der Winkel keinerlei Schwierigkeit. Der Netztyp III besteht aus einer direkten Verbindungslinie und einer Gabel. Da die Verkehrsbelastung der Gabeläste bekannt ist, entspricht die Konstruktion der Gabel dem Verfahren aus Abschnitt 442. Die konkrete Netzform des Typ IV schließlich ist durch das Dreieck $P_1P_2P_3$ unmittelbar gegeben.

444. Der Launhardt'sche Satz vom Knotenpunkt: Kritik, Beispiele

Noch in der Arbeit von Hoffmann (1961, S. 19, 27) werden die theoretischen Ergebnisse Launhardts aus den Jahren 1887/88 unverändert übernommen. Ein Vergleich mit den in dieser Arbeit bisher erzielten Ergebnissen zeigt, daß Launhardts Resultate sowohl unvollständig als auch zum Teil ungenau sind. Es soll deshalb hier eine Gegenüberstellung vorgelegt werden.

Nach Launhardt läßt sich das Drei-Punkte-Problem optimal durch ein Netz der Gestalt △ lösen, wenn die Betriebskosten relativ hoch liegen. Sind dagegen die Baukosten der wesentliche Kostenfaktor in der Gesamtrechnung, so ist die optimale Netzgestalt von der Form ⅄. Der Gabelpunkt muß dabei so gelegt werden, daß „sich (die) drei Kräfte, deren Größen im Verhältnis der kilometrischen Bau- und Betriebskosten stehen und welche in den Richtungen der drei Strahlen wirken, das Gleichgewicht halten". Welche der beiden Netzgestalten zu wählen ist, hängt von einer rechnerisch zu ermittelnden Grenzverkehrsbelastung ab.

Launhardt demonstriert seine Berechnungen an einem Beispiel. Die Voraussetzungen:

Im zweidimensionalen homogenen Verkehrsraum stehen drei Verkehrsquellen miteinander in Verkehrsspannung. Die zu befördernden Gütermengen sind für jede der drei Spannungen gleich; außerdem formen die drei Verkehrsquellen hinsichtlich ihrer Lage ein gleichseitiges Dreieck. Die Kosten pro Kilometer Verkehrswegebau sollen 140 000 Mark betragen, die Verzinsung des Baukapitels sei jährlich 5% und die Betriebskosten 0,02 Mark pro Tonne und Kilometer.

Es folgt die Behauptung:

Kleine Verkehrsspannungen werden kostengünstiger durch das ⅄-Netz bedient, relativ große dagegen durch das Netz der Gestalt △. Genau dann, wenn das einzelne Verkehrsvolumen zwischen je zwei der drei Punkte 946 000 Tonnen beträgt, ist die Grenzverkehrsbelastung erreicht, und die beiden Netz-Lösungen sind gleichwertig.

Hier muß die erste Kritik ansetzen, denn Launhardt kennt als Lösungen für das Drei-Punkte-Problem offenbar nur die beiden Netzgestalten ⅄ bzw. △. Gerade aber sein soeben vorgeführtes Beispiel hat nicht zwei, sondern unendlich viele Lösungen, nämlich alle Varianten des Typs I (= ⅄). (Siehe dazu Figur 4.12 und 4.13)

Beweis:

Der Beweis soll einmal durch Anwendung der bisher erzielten Resultate geführt werden (1). Außerdem wird noch ein anderer Beweis vorgelegt, der von der vorliegenden Arbeit unabhängig ist (2).

(1): Stellt man sich in Figur 4.10 das Dreieck $P_1P_2P_3$ gleichseitig vor und nimmt an, daß zwischen jedem Punktepaar ein Verkehrsvolumen von jährlich 946 000 t zu bewältigen ist, so sind aus Gründen der Symmetrie die Winkel ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gleich. Cos ϱ_1 ist nach Gleichung (4–11) und (4–13) (siehe auch Figur 4.2):

$$\cos\,\varrho_1 = \frac{[c + (f_{12} + f_{13})\,k]^2 - (c + f_{12}\cdot k)^2 - (c + f_{13}\cdot k)^2}{2(c + f_{12}\cdot k)\,(c + f_{13}\cdot k)}\,. \qquad (4\text{–}32)$$

Bezeichnen wir $f_{12} = f_{13} = f_{23}$ mit f und übernehmen die von Launhardt in seinem Beispiel angenommenen Zahlenwerte, so ist:

$$\cos\,\varrho_1 = \frac{2f^2k^2 - c^2}{2(c + f\cdot k)^2} = \frac{2(946\,000\cdot 0{,}02)^2 - (140\,000\cdot 0{,}05)^2}{2(140\,000\cdot 0{,}05 + 946\,000\cdot 0{,}02)^2}$$

$$= \frac{666\,932\,800}{1\,343\,692\,800} = 0{,}4963\ldots \approx 0{,}5\,. \qquad (4\text{–}33)$$

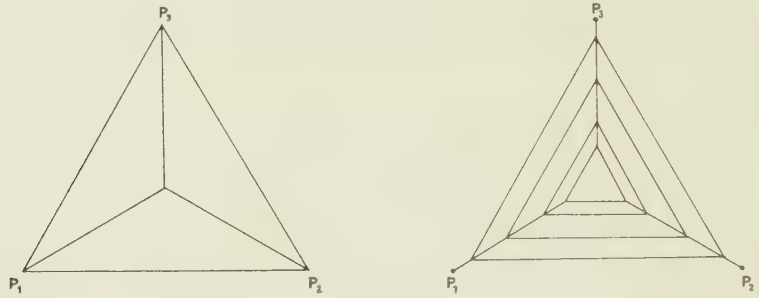
Das Ergebnis ist nicht genau 0,5, weil der von Launhardt angegebene Grenzbelastungswert 946 000 Tonnen seinerseits nicht genau, sondern nur abgerundet ist.

Es folgt: $\varrho_1 = 60°$. Wegen $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ gilt also $\sum_{i=1}^{3} \varrho_i = 180°$. Das aber bedeutet, daß die optimale Netzgestalt vom Typ I (= ⅄) ist. Es liegen demnach unendlich viele verschiedene Lösungen vor. (Siehe dazu auch Figur 4.12 und 4.13) Von ihnen hat Launhardt nur die beiden extremen Fälle angegeben, nämlich

(a) die Lösung, bei welcher das (hier gleichseitige) Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ die Seitenlänge 0 hat, und

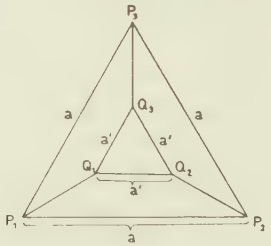
(b) die Lösung, bei welcher die Seitenlängen des Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ maximal sind: Das ist offenbar genau dann der Fall, wenn Dreieck $Q_1Q_2Q_3$ gleich dem Dreieck $P_1P_2P_3$ ist (letzteres war, wie erinnerlich, als gleichseitig vorausgesetzt worden). —

Figur 4.13a zeigt die beiden Launhardt'schen Lösungen sowie einige Beispiele weiterer Lösungsmöglichkeiten.



Figur 4.13a

(2): Wiederum seien die Voraussetzungen des Beispiels von Launhardt gegeben. Wir berechnen für den in Figur 4.13b eingezeichneten Netztyp I die Gesamtkosten und fragen, wie groß die Seitenlänge a' seines (gleichseitigen) Dreiecks $Q_1Q_2Q_3$ sein muß, damit die Lösung optimal ist. Nach Launhardt müßte das Ergebnis $a' = 0$ beziehungsweise $a' = a$ heißen. Es wird sich jedoch herausstellen, daß die Kosten von der Seitenlänge a' unabhängig sind, d. h. daß sich für jeden Wert a' $(0 \leq a' \leq a)$ die gleichen Kosten ergeben, womit dann unsere Behauptung der Existenz beliebig vieler gleichwertiger Netzlösungen bewiesen ist, und zwar unabhängig von der vorliegenden Arbeit.



Figur 4.13b

Es werde in Figur 4.13 b $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_2Q_2} = \overline{P_3Q_3}$ mit s bezeichnet; s läßt sich durch die vorgegebenen Größen a und a' ausdrücken:

$$s = \frac{\sqrt{3}}{3}(a - a') . \tag{4–34}$$

Dann berechnen sich die Gesamtkosten C zu

$$C = 3 \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{3} 3\,(a - a')\right](c + 2fk) + 3a' \cdot (c + f \cdot k) . \tag{4–35}$$

Wir substituieren $k = 0{,}02$, $c = 140\,000 \cdot 0{,}05 = 7000$ und $f = 946\,000$ (d. h. wieder die Zahlen aus Launhardts Beispiel) und erhalten:

$$C = (a - a') \cdot 77\,663 + a' \cdot 77\,760 . \tag{4–36}$$

Die Differenz der beiden Zahlenfaktoren ist nahezu Null, sie wäre genau Null, wenn f nicht als abgerundete Zahl in die Rechnung eingegangen wäre. Berücksichtigt man diesen Umstand, so läßt sich Gleichung (4–36) umformen zu

$$C = 77\,700 \cdot a , \tag{4–37}$$

d. h. die Gesamtkosten sind von der Größe a' unabhängig, was zu beweisen war. —

Eine weitere kritische Anmerkung wird bei jenen Ausführungen Hoffmanns (1961, S. 27) notwendig, in denen er von Launhardt die Behauptung übernimmt, daß im 3-Punkte-Problem die Grenz-Verkehrsbelastung f_g genau dann erreicht ist, wenn gilt:

$$f_g = \frac{A \cdot i}{0{,}37 \cdot k} \tag{4–38}$$

wobei A die kilometrischen Anlagekosten, i den Zins- und Tilgungssatz[23] und k die kilometrischen Betriebskosten je Tonne (bzw. Fahrzeug) darstellen.

Setzt man in diese Gleichung die Zahlenwerte des Beispiels von Launhardt ein, so ergibt sich wieder der schon oben genannte Wert der Grenzverkehrsbelastung von 946 000 t.

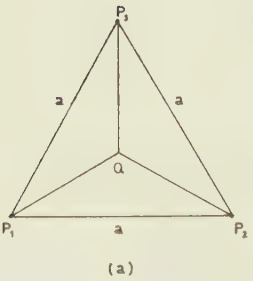
Hoffmann benutzt die allgemeine Gleichung zur Bestimmung einiger für die Gegenwart repräsentativer Grenzbelastungswerte, indem er auf der rechten Seite Durchschnittswerte des neuesten Zahlenmaterials einsetzt.

[23] Vergl. Abschnitt 23. Genau genommen sind die Bau- und Betriebskosten bei Launhardt nicht vergleichbar, weil erstere — durch die Tilgung! — zeitlich begrenzt sind, während letztere jedes Jahr, also ohne zeitliche Begrenzung, anfallen.

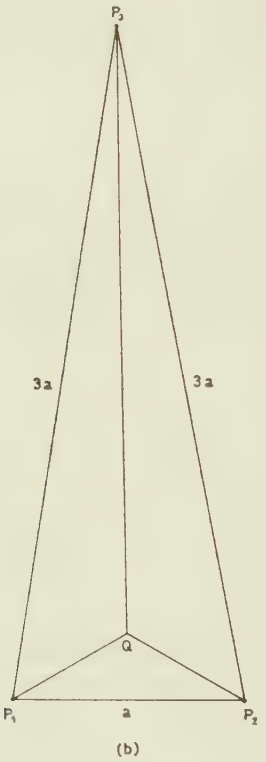
Da Hoffmann keine weiteren Einschränkungen macht, könnte man glauben, die Gleichung gelte für alle beliebigen Tripel von Verkehrsquellen, also unabhängig von ihrer Lage. Das ist aber keineswegs der Fall. Figur 4.13c zeigt zwei Verkehrssituationen: Einmal bilden die drei Quellpunkte ein gleichseitiges Dreieck, im anderen Falle sind die Längen zweier Dreiecksseiten verdreifacht worden. Unter der Annahme jeweils gleichgroßer Verkehrsspannungen wurden für beide Situationen die Gleichungen der Grenzverkehrsbelastung in allgemeiner Form aufgestellt:

(a) $$f_g = \frac{A \cdot i}{0{,}37 \cdot k} \cdot \tag{4–39}$$

(b) $$f_g = \frac{A \cdot i}{0{,}176 \cdot k} \tag{4–40}$$



(a)



(b)

Figur 4.13c

In Worten besagt dieses Ergebnis:

Ist in der Verkehrssituation (a) die Grenzverkehrsbelastung erreicht (d. h. $\perp$-Lösung und $\triangle$-Lösung sind kostenmäßig gleichwertig), so muß in der Situation (b) das Verkehrsvolumen mehr als doppelt so groß sein, damit auch hier die Grenzverkehrsbelastung erreicht ist. Übrigens ist auch ohne Rechnung leicht einzusehen, daß mit wachsender Entfernung des Punktes P_3 von P_1 und P_2 auch die Verkehrsfrequenz immer größer werden muß, sofern die beiden Netzlösungen $\perp$ und $\triangle$ zu den gleichen Gesamtkosten führen sollen.

Wir fassen das Ergebnis dieser zweiten Kritik zusammen:

Die von Launhardt aufgestellte Gleichung der Grenzverkehrsbelastung gilt nur, wenn

1. die drei Verkehrsspannungen gleichgroß sind und
2. die Positionen der drei Verkehrsquellen ein gleichseitiges Dreieck formen.

Eine derart spezielle Verkehrssituation wird jedoch in der Praxis selbst näherungsweise nur selten auftreten.

Betrachtet man die allgemeine Verkehrssituation des 3-Punkte-Problems, d. h. läßt man beliebige Verkehrsmengen und beliebige Positionen der drei Quellpunkte zu, so gibt es für je zwei Netztypen, die im Sinne der Figur 4.11 benachbart sind, eine Grenzverkehrsbelastung. Sie läßt sich ohne weitere Schwierigkeit aus den Ergebnissen des Abschnitts 44 bestimmen. Da der Rechenprozeß einerseits sehr aufwendig ist und andererseits keine neuen Erkenntnisse bringt, wurde in dieser Arbeit auf die Berechnung der einzelnen Grenzverkehrsbelastungen verzichtet. —

In einer dritten Kritik am Launhardtschen Satz vom Knotenpunkt folgt jetzt ein Beispiel, in welchem die Lösung eines 3-Punkte-Problems zu einer Netzgestalt vom Typus II ($= \curlywedge$) führt. Es wird dabei zahlenmäßig nachgewiesen, daß er tatsächlich noch kostengünstiger ist als die beiden schon Launhardt bekannten Netztypen (Typ V = $\perp$ und Typ IV = $\triangle$).

Gegeben seien drei Verkehrsquellen, die durch ein Verkehrsnetz miteinander verbunden werden sollen. Die zu erwartenden Verkehrsfrequenzen zwischen diesen Punkten P_1, P_2 und P_3 seien:

$$f_{12} = 3 \text{ Millionen PKW-Einheiten jährlich}$$

$$f_{23} = 2 \text{ Millionen PKW-Einheiten jährlich}$$

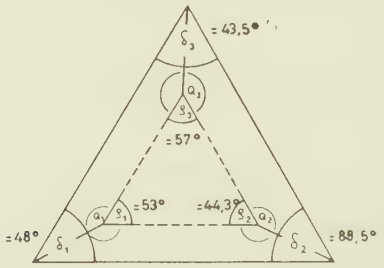
$$f_{13} = 1 \text{ Million PKW-Einheiten jährlich.}$$

Die gegenseitigen Lagebeziehungen der drei Quellpunkte sind durch ihre Entfernungen, d. h. durch die Längen der Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$ gegeben. Sie sollen betragen:

$$\overline{P_1P_2} = 30{,}6\text{ km},\quad \overline{P_2P_3} = 33{,}0\text{ km},\quad \overline{P_1P_3} = 44{,}6\text{ km}.$$

Die Anlagekosten werden mit 700 000 DM pro Straßenkilometer, der Satz für Verzinsung, Tilgung[24] und Unterhaltung mit 7,14% und die Betriebskosten je Kilometer und PKW-Einheit mit DM 0,12 angenommen[25].

Wir setzen die Lösung dieses Verkehrsnetzproblems wieder mit dem allgemeinen Netztypus I (= ⅄) an und berechnen mittels der in Abschnitt 42 entwickelten Formeln die kostenmäßig optimalen Winkel. Das Resultat zeigt Figur 4.13d.



Figur 4.13d

Ihr lassen sich zwei Tatbestände entnehmen, die für die endgültige Lösung entscheidend sind:

1. $$\sum_{i=1}^{3} \varrho_i = 154{,}3° < 180°$$

2. $$\varrho_2 = 44{,}3° < \delta_2 = 88{,}5°.$$

Wenden wir nun die in Figur 4.13 zusammengestellten Ergebnisse an, so besagt die erste Ungleichung, daß das optimale Netz von der Gestalt des Typus II (= ⅄) ist, und die zweite Ungleichung, daß seine Dreiecksspitze mit dem Quellpunkt P_2 zusammenfällt.

Da alle erforderlichen Winkel bekannt sind, läßt sich die endgültige Netzlösung ohne weitere Schwierigkeit auf graphischem Wege konstruieren. Das Endergebnis zeigt Figur 4.13e.

In die Zeichnung wurden auch die optimalen Lösungen der Typen IV (= △) und V (= ⅄) eingetragen. Die folgende Tabelle erlaubt einen Ver-

[24] Siehe Fußnote 23.

[25] Durchschnittswerte für die BRD 1960 (nach Hoffmann 1961, S. 27).

gleich zwischen den Werten der günstigsten Netzgestalt und den beiden Launhardtschen Lösungen und [26].

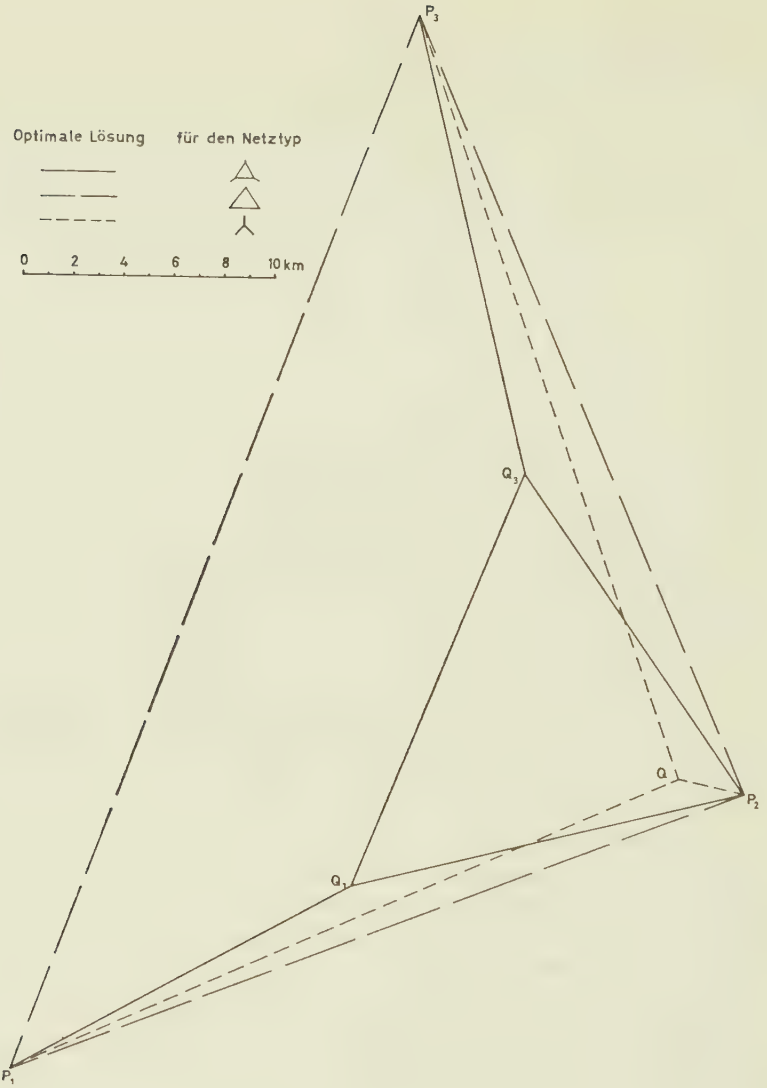
Netztyp	Netzlänge (km)	Zahl der PKW (km-Jahr) (Mill. km)	Reine Baukosten (Jahr) (Mill. Mk)	Reine Betr.-Kost. (Jahr) (Mill. Mk)	Gesamtkosten (Jahr) (Mill. Mk)
	62,70	221,50	3,135	26,580	29,715
	82,12	210,92	4,106	25,3104	29,4164
	108,20	202,4	5,41	24,291	29,701

Wie aufschlußreich eine exakte Netzberechnung sein kann, demonstrieren deutlich die beiden ersten Spalten der Tabelle: Während sich die verschiedenen Netzlängen wie (ca.) 6 : 8 : 11 verhalten, also beträchtlich divergieren, verhalten sich die entsprechenden Zahlen der zu leistenden PKW-Kilometer wie 22 : 21 : 20. Zwar liegen, wie die letzte Spalte zeigt, die jeweiligen Gesamtkosten trotzdem dicht beieinander, jedoch muß in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf den folgenden Tatbestand hingewiesen werden:

Der hier vorausgesetzte zweidimensionale homogene Verkehrsraum wird in der Praxis absolut genommen nie auftreten. I. a. zeigt er mindestens eine relativ kleine Inhomogenität und ist eventuell von Teilräumen ausgeprägter Inhomogenität durchsetzt (z. B. Stufen in einer Schichtstufenlandschaft oder steigende Grundstückskosten in der Nähe größerer Siedlungen). In solchen Fällen ist es für den Planer vorteilhaft, mehrere Alternativen grundverschiedener Netzgestalten zu haben, die in den Gesamtkosten kaum differieren. So könnte in Figur 4.13e eine zwischen P_1 und P_3 gelegene Verkehrsbarriere mittels des Netztypus II (=), oder, falls sie ausgedehnter ist, mittels des Netztypus V (=) umgangen werden, ohne daß sich die Gesamtkosten dadurch erhöhten.

Zum Abschluß eine kurze, beispielhaft gedachte Interpretation von Figur 4.13e. Betrachtet man die drei Netze im Detail, so läßt sich schon mit dem Auge in groben Zügen ablesen, wie sich die einzelnen Netzgestalten an den vorgegebenen Verkehrsmengen und Kosteneinheiten orientieren.

[26] Es ist übrigens kein Zufall, daß die drei verschiedenen Gesamtkostenwerte so dicht beieinander liegen. Verwendet man nur Zahlen, wie sie in der Praxis auftreten, so werden, falls das optimale Netz vom Typus ist, die Kostenwerte der genannten drei Typen immer nur geringe Differenzen aufweisen. Der Beweis muß hier aus Gründen der thematischen Beschränkung unterbleiben.



Figur 4.13e

(1) Die stärkste Verkehrsspannung besteht zwischen P_1 und P_2 (3 Millionen PKW-Einheiten pro Jahr). Alle drei Netze bieten deshalb eine direkte oder nahezu direkte Verbindung zwischen P_1 und P_2 an. Die Umwege betragen prozentual bei Typ Δ 0%, bei Typ $\curlywedge$ 0,8% und bei Typ $\curlyvee$ 1,4%.

(2) Entsprechend der geringeren Verkehrsspannung zwischen P_2 und P_3 (2 Millionen PKW-Einheiten jährlich) ist dort der gleiche Sachverhalt in abgeschwächtem Maße zu beobachten, d. h. die Abweichungen von der Geraden sind bei den Typen Δ und $\perp$ schon etwas ausgeprägter (Umweg-Anteile in der Reihenfolge wie oben: 0%, 1,6%, 3,1%).

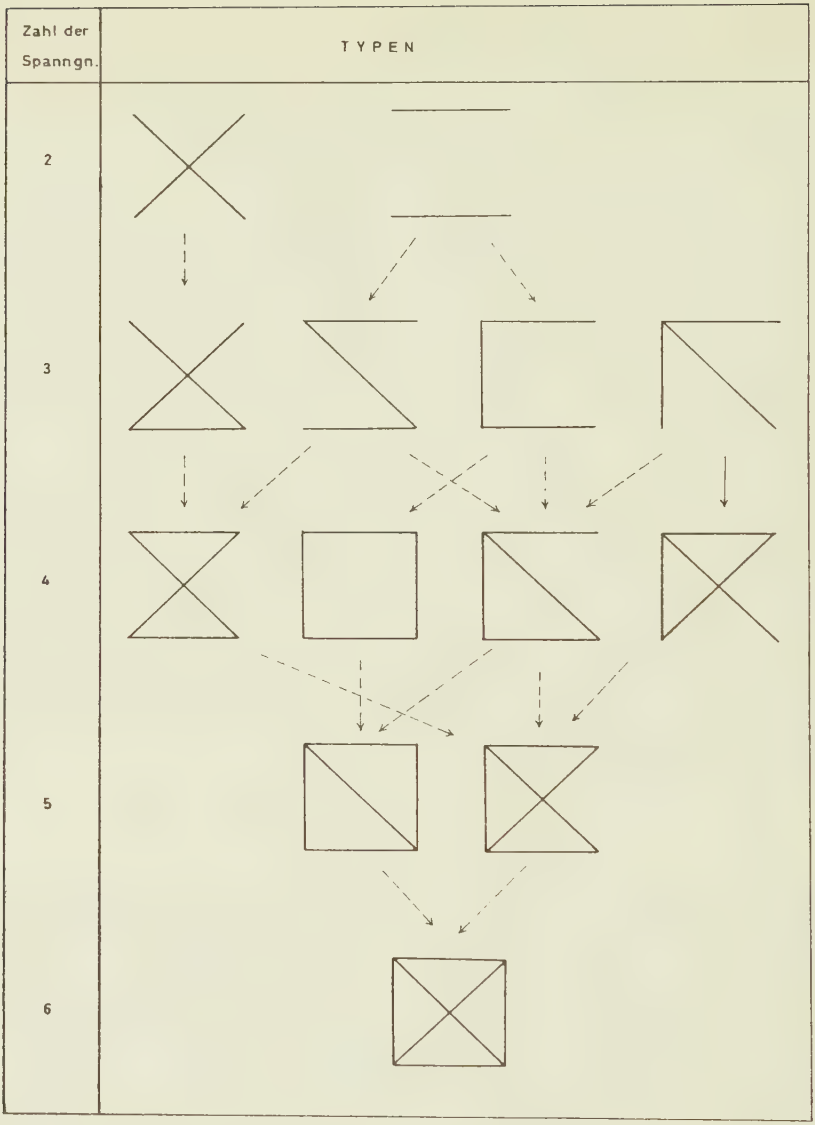
(3) Die geringste Verkehrsspannung herrscht zwischen P_1 und P_3 (1 Million PKW-Einheiten jährlich). Dem aus ihr resultierenden Verkehr werden auf den Netztypen Δ und $\perp$ erhebliche Umwege zugemutet, nämlich 12,9% beziehungsweise 26%. Das sind offensichtlich Beträge, wie man sie im Vergleich zu den Umwegen auf den beiden anderen Strecken ($\overline{P_1P_2}$ bzw. $\overline{P_2P_3}$) rein intuitiv wohl kaum vermutet hätte. Noch anschaulicher wird die relativ enorme Divergenz, wenn man das jeweilige Maß der Umwege bei den Netzen in Figur 4.13e visuell vergleicht. Hier treten die Vorteile einer präzisen mathematischen Untersuchung offen zutage.

Wodurch wird dieses unerwartete Ergebnis bedingt? Die Ursache ergibt sich durch eine kurze Rechnung am Netz Δ. Dieses Netz bietet jeder Verkehrsspannung eine geradlinige Verbindung. Dabei belaufen sich die Kosten für Bau und Betrieb der Strecke $\overline{P_1P_3}$ auf 7,58 Millionen DM. Würde man jedoch die Baukosten einsparen und den Verkehr zwischen P_1 und P_3 über das restliche Netz, also über Punkt P_2 leiten, so würden die nun stark vergrößerten Betriebskosten allein 7,63 Millionen DM betragen, d. h. es entstünden außerordentlich geringe Mehrkosten. Überträgt man diese Überlegungen auf die „dazwischen" liegenden Netze Δ und $\perp$, so wird das zunächst überraschende Ergebnis verständlich. —

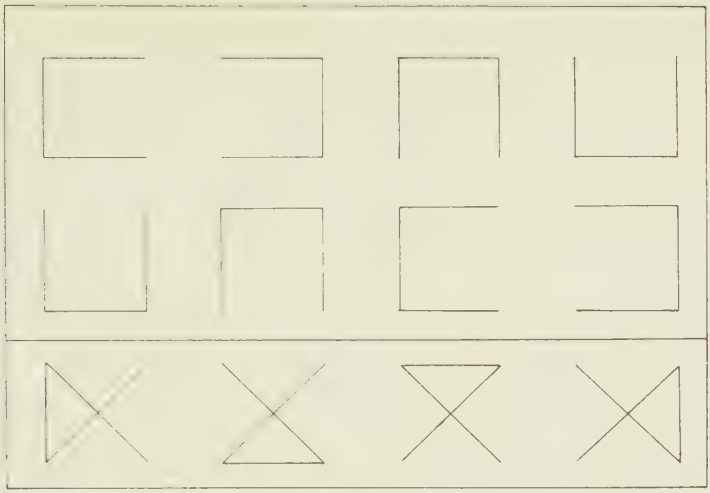
45. Spannungsfelder und Netze höherer Ordnung

Vom theoretischen Standpunkt aus könnte die Untersuchung durch Vergrößerung der Zahl der Verkehrsquellen und der Zahl der zwischen ihnen bestehenden Verkehrsspannungen beliebig lange fortgesetzt werden. Um wenigstens den Trend aufzuzeigen, den eine solche Untersuchung mit wachsender Komplexität der Voraussetzungen nehmen würde, sind in Figur 4.14 alle möglichen Spannungsfelder für vier Fixpunkte als vertauschbar angesehen, so daß asymmetrische Spannungsfelder jeweils nur durch einen Repräsentanten vertreten sind.

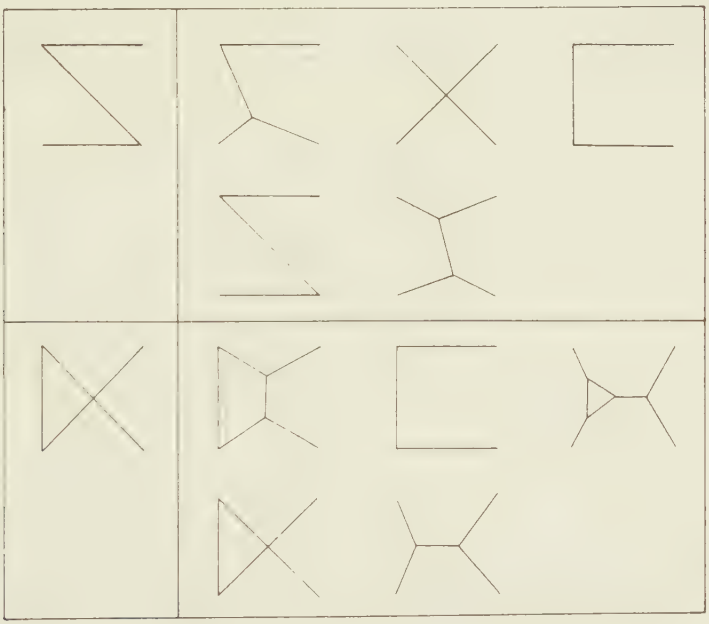
Zur Verdeutlichung der Situation zeigt Figur 4.15 die Repräsentanten zweier Spannungsfelder und die Mannigfaltigkeit ihrer verschiedenen Ausprägungen. Figur 4.16 zeigt zwei Spannungsfelder mit je drei Verkehrsspannungen und je nach Größe der gegebenen Parameter verschiedenartige



Figur 4.14



Figur 4.15



Figur 4.16

optimale Netzgestalten. Allgemein ergibt ein Vergleich mit den vorhergehenden Abschnitten, daß mit den dort entwickelten Methoden alle Verkehrsprobleme mit bis zu vier Verkehrsquellen und bis zu drei Verkehrsspannungen auf geometrischem Wege gelöst werden können[27].

Es ist klar, daß jedes der in Figur 4.14 dargestellten Spannungsfelder als Sonderfall des Feldes mit sechs Spannungen zwischen vier Punkten interpretiert werden kann. Figur 4.17 zeigt das Feld zusammen mit den zwei möglichen optimalen Lösungen für minimale Baukosten (a), der optimalen Lösung für minimale Betriebskosten (b), sowie zwei Ausprägungen des allgemeinen Netzmodells (c), aus welchen alle anderen Netzgestalten „zwischen" den Extremen (a) und (b), d. h. die verschiedenen topologischen Netztypen, deduziert werden können. Schon im Abschnitt 43 wurde darauf aufmerksam gemacht, daß bei jedem Verkehrsproblem, in welchem der rechnerische Ansatz von zwei Gabeln mit einem gemeinsamen Ast ausgeht, grundsätzlich zwei topologisch verschiedene Netze in Frage kommen[28] (Figur 4.17a). Das allgemeine Netz (Figur 4.17c) ist eine Kombination von fünf solcher Doppelgabeln und besitzt deshalb $2^5 = 32$ topologisch verschiedenartige Ausprägungen, jede von ihnen kann durch schrittweise Netzverkürzung oder -verlängerung in andere Typen überführt werden, von denen hier in den Figuren nur einige Beispiele gebracht werden konnten.

Die Erörterung von optimalen Lösungen für Verkehrsspannungsfelder in der homogenen Ebene soll hier abgebrochen werden, und zwar aus folgenden Gründen:

(I) Bei Vergrößerung der Zahl der Spannungen steigt die Maximalzahl möglicherweise erforderlicher Gabelpunkte sehr rasch:

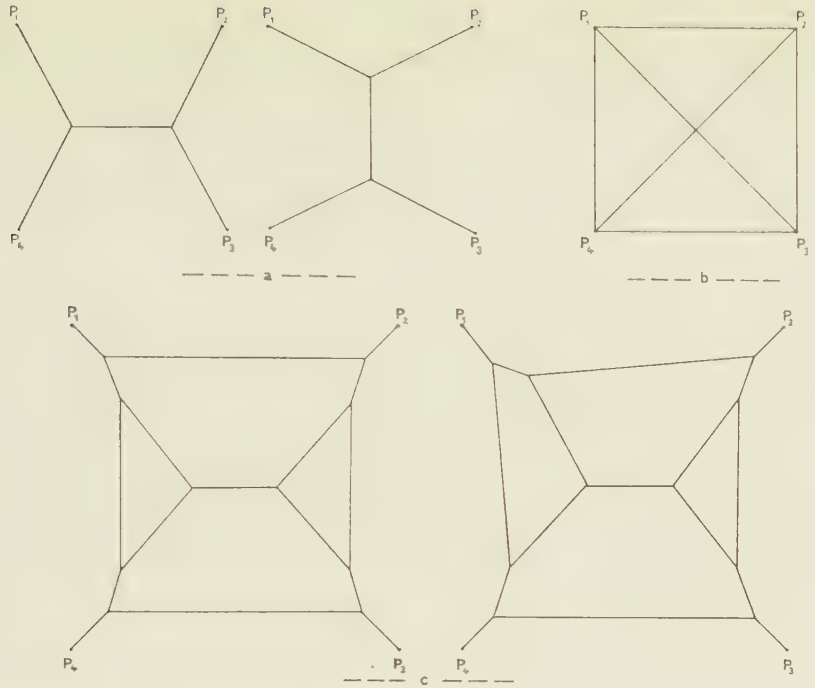
Bei drei Spannungen und drei Verkehrsquellen sind es 3, bei sechs Spannungen zwischen vier Verkehrsquellen 10, und bei zehn Spannungen zwischen fünf Verkehrsquellen sind es bereits 25 Gabelpunkte.

Verkehrsnetze ,die ihrer Natur nach durch zusätzliche Knotenpunkte verteuert werden, erfordern eine Einbeziehung der Knotenpunktzahl in die mathematische Planung ökonomisch optimaler Netzgestaltung, was zwar rechnerisch kein Problem ist, hier jedoch aus Gründen der stofflichen Beschränkung unterbleiben muß.

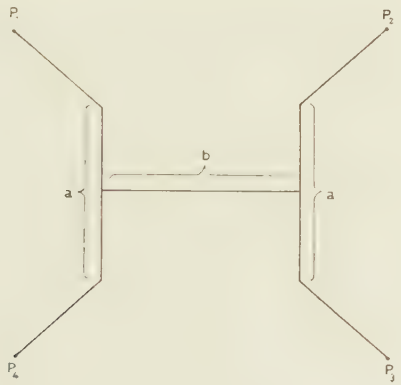
(II) Noch ungleich schneller wächst die Zahl der topologisch verschiedenen allgemeinen Netzformen, von denen jede einzelne hinsichtlich ihrer minimalen Gesamtkosten untersucht werden müßte. Bei drei Verkehrsquellen

[27] Es ist zu vermuten, daß mit den hier vorgetragenen Methoden der Aufstellung von Netztypen und ihrer systematischen „Ökonomisierung" jedes derartige Netzproblem gelöst werden kann, für diese Hypothese steht der Beweis aber noch aus. —

[28] Vergl. Fußnote 21.



Figur 4.17



Figur 4.18

mit drei Verkehrsspannungen gibt es eine solche allgemeine Netzfigur (siehe Figur 4.10), aus welcher sich die anderen Netztypen ableiten lassen. Bei vier Verkehrsquellen mit sechs Spannungen sind es schon 32 (zwei davon zeigt

Figur 4.17c), bei fünf Verkehrsquellen mit zehn Spannungen sind es nicht weniger als mindestens 100 000. Solange es nicht gelingt, diese Vielfalt topologisch verschiedener Typen als Varianten eines noch allgemeineren Netzes darzustellen, bleibt nur die Verwendung elektronischer Rechenanlagen zur Bewältigung solcher Aufgaben. Einen möglichen Ausweg, der hier nicht weiter verfolgt wird, zeigt Figur 4.18. Man führt in den Rechenprozeß die zusätzliche Bedingung $a \cdot b = 0$ ein und erfaßt dadurch die beiden topologisch verschiedenen Typen (siehe Figur 4.17a) gleichzeitig .

(III) Insofern die vorliegenden Erörterungen nicht als Selbstzweck im Sinne der Geometrie, sondern als Beitrag zur theoretischen Angewandten Verkehrsgeographie gedacht sind, erscheint es zweckmäßig, vor dem weiteren Ausbau der Theorie erst einmal zusätzliche geographische Phänomene wie bestehende Verkehrsnetze oder die räumliche Varianz der Böden in die Untersuchungen mit einzubeziehen. Umgekehrt sollte berücksichtigt werden, daß in der planerischen Praxis Verkehrsprobleme, die die Trassierung komplexer Systeme von Verkehrswegen erfordern, vergleichweise selten sind. Und was diese betrifft, so ist darauf hinzuweisen, daß sie sich ausnahmslos in eine Reihe relativ primitiver Probleme der in diesem Kapitel untersuchten Art zerlegen lassen.

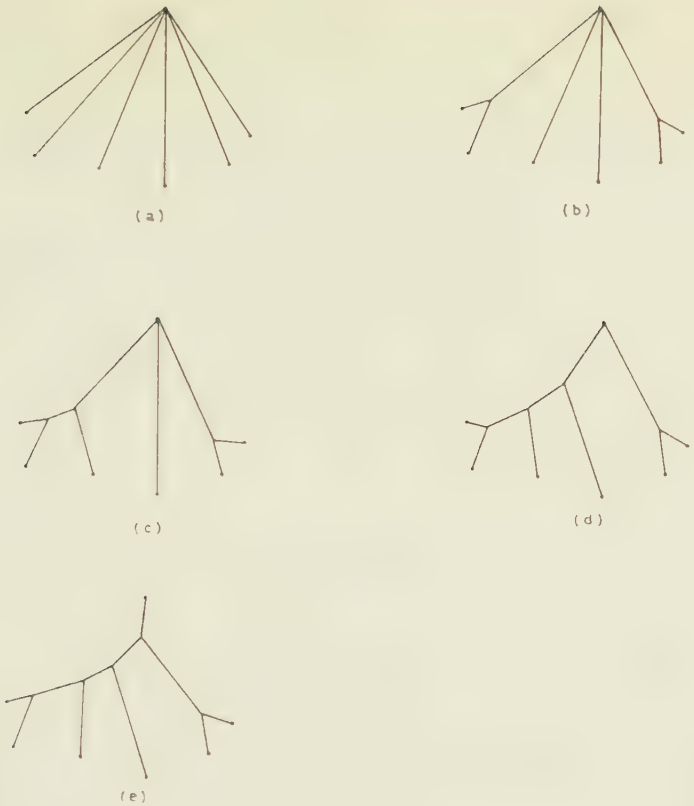
46. Zur Struktur der Netz-Topologie

Wir beweisen:

Jeder Knotenpunkt ist eine räumliche Konzentration von Gabelpunkten.

Gegeben sei ein Knotenpunkt, in dem eine Anzahl von Verkehrslinien zusammenlaufen. Aus je zwei benachbarten Verkehrslinien bildet man Paare von solchen, wobei jede Linie nur einmal erfaßt werden darf. Jedes Paar wird dann ersetzt durch eine einzige Verkehrslinie, die sich außerhalb des Knotenpunktes in zwei Äste gabelt. Liefen vorher n Linien im Knotenpunkt zusammen, so sind es jetzt nur noch $(n/2)$ beziehungsweise $[(n-1)/2+1]$, je nachdem, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Mit den jetzt im Knotenpunkt zusammenlaufenden Linien verfährt man ebenso und setzt den Auflösungsprozeß so lange fort, bis nur noch drei Linien im Knotenpunkt verknüpft sind. Das so entstandene System von Gabeln läßt sich wieder zu dem ursprünglichen Knotenpunkt umformen, wenn man allen Gabelästen, die in dem System von Gabeln Gabelpunkte verbinden, die Länge Null gibt.

Verallgemeinerung: Löst man jeden Knotenpunkt eines Netzes in der oben beschriebenen Weise auf, so stellt sich das Netz als ein System von Gabeln dar, von denen jede mindestens einen ihrer drei Äste mit einer anderen Gabel gemeinsam hat. Sind die in jedem Gabelpunkt zusammenlaufen-



Figur 4.19

den Verkehrsströme hinsichtlich ihres Volumens bekannt, so lassen sich, wenn man die jeweiligen Endpunkte der Äste festhält und dann das in Abschnitt 42 entwickelte Konstruktionsverfahren anwendet, die Positionen der Gabelpunkte genau bestimmen. Da in diesem Sinne jeder Gabelpunkt zugleich Endpunkt für die Äste anderer Gabeln (mindestens einer) ist, führt die sukzessive „Einrichtung" der Gabelpunktpositionen zu einem Approximationsprozeß, der mit jedem Schritt die Gesamtkosten senkt. Da diese nicht beliebig verringert werden können, sondern mit Sicherheit eine positive untere Schranke besitzen, strebt auch der Approximationsprozeß einer festen Netzgestalt zu, die mengentheoretisch als Häufungselement zu bezeichnen ist. Wegen der schon früher aufgezeigten Vielfalt möglicher topologischer Typen ist dieser „Ökonomisierungsprozeß" durch Verzerrung der

Figur 4.20

ursprünglichen Netzgestalt *nicht* eindeutig, im praktischen Fall müßten also die verschiedenen Varianten durchexerziert werden.

Figur 4.19 zeigt, wie sich ein Knotenpunkt mit sechs Ästen schrittweise in ein System von fünf Gabeln zerlegen läßt. Dabei kann die Skizze (a) auch als das bestehende Spannungsfeld betrachtet werden. Sind die Baukosten im Vergleich zu den Betriebskosten hoch, so kann der Prozeß der Ökonomisierung zu einer Netzgestalt führen, wie sie die Skizze (e) zeigt. Das Beispiel zeigt zugleich, daß der Prozeß nicht eindeutig ist und deshalb zu verschiedenartigen Konfigurationen des Systems von fünf Gabeln führen kann. Die sieben Punkte bilden das Spannungsfeld, wie es zwischen Madrid und den Haupthäfen der Südost- und Südküste Spaniens besteht. Figur 4.20 zeigt das Eisenbahnnetz, das Madrid mit den Häfen Alicante, Cartagena, Almeria, Malaga, Cadiz und Huelva verbindet.

Das letztere Beispiel demonstriert deutlich, wie geographische Kräfte (siedlung- und wirtschaftsgeographische Gegebenheiten, Morphologie des Landes, u. a.) mit mathematischen Komponenten (Geometrie der Lagebeziehungen, algebraische Relationen zwischen Bau- und Betriebskosten, u. a.) zusammenwirken und gemeinsam das Erscheinungsbild kulturgeographischer Phänomene bestimmen können. —

5. ERWEITERUNG VON VERKEHRSNETZEN IM HOMOGENEN RAUM

In diesem Kapitel sollen Verkehrsprobleme untersucht werden, zu deren Lösung ein bereits bestehendes Verkehrsnetz benutzt werden kann. Wir gehen aus von folgenden Voraussetzungen:

A) Es ist ein Verkehrsnetz in der homogenen Ebene gegeben.

B) Zwischen zwei gegebenen Punkten besteht eine Verkehrsspannung von gegebener Größe.

Gesucht ist die Linienführung eines zu bauenden Verkehrsweges, die die entstehenden Kosten minimiert, wobei das existierende Verkehrsnetz benutzt werden kann.

Der möglicherweise notwendige Kapazitätsausbau von in die Lösung einzubeziehenden Netzgliedern wird als Kostenfaktor erst später in die Überlegungen eingeführt.

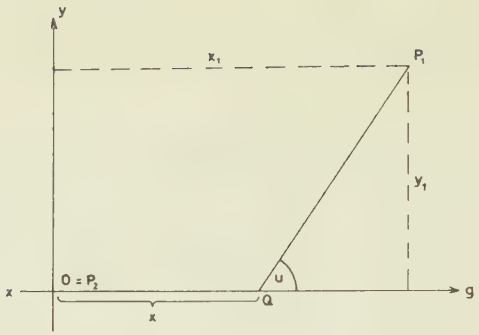
51. Verbindung eines Quellpunktes mit einer Verkehrsstrecke

Vorbemerkung: Die Ausführungen dieses Abschnitts bieten einerseits etwa gegenüber der Arbeit von v. Stackelberg 1938 nichts wesentlich Neues und sind andererseits zusammen mit Abschnitt 52 nur Sonderfälle des allgemeinen Problems in Abschnitt 53. Jedoch eignen sie sich sehr gut als anschauliche Einführung in das Thema dieses Kapitels.

Wir beginnen die Untersuchungen wieder mit der einfachsten Situation:

Gegeben seien zwei Punkte P_1, P_2 mit einer zwischen ihnen bestehenden Verkehrsspannung f und ein geradliniger Verkehrsweg g. Es stellt sich die Frage: Lohnt es sich, den Verkehrsweg g in eine zu bauende Wegverbindung von P_1 nach P_2 aufzunehmen, und, wenn ja, wo liegen die optimalen Ein- und Austrittsstellen Q_1 und Q_2. Diese Fragestellung wird noch weiter vereinfacht durch die Annahme, daß der Punkt P_2 auf dem Verkehrsweg g liegt. Diese Situation ist dargestellt in Figur 5.1. Die Frage lautet nun: In welchem Punkt Q soll der geplante Verbindungsweg von P_1 nach P_2 in den Verkehrsweg g einmünden.

Es seien (x_1, y_1) die Koordinaten von P_1, (x_2, y_2) die Koordinaten von P_2 und (x, y) die von Q. Der geradlinige Verkehrsweg g werde durch die Glei-



Figur 5.1

chung $y = ax + b$ definiert. Der Einfachheit halber sei der Koordinatenursprung 0 so gelegt, daß er mit P_2 zusammenfällt, das gleiche gelte für die x-Achse und g.

Mit anderen Worten:

$$(x_2, y_2) = (0, 0)$$
$$y = 0$$

Wie bereits früher definiert, sollen wieder c die Baukosten pro Längeneinheit, k die Betriebskosten pro Tonne und Längeneinheit und f der zu bewältigende Verkehrsstrom in Tonnen, alles berechnet für eine feste Zeiteinheit, bedeuten.

Dann lautet die Kostenfunktion C:

$$C = (c + f \cdot k) \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1)^2} + (f \cdot k)\, x \tag{5–1}$$

Wir setzen die erste Ableitung gleich Null:

$$\frac{dC}{dx} = (c + f \cdot k) \cdot \frac{-(x_1 - x)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} + f \cdot k = 0 \tag{5–2}$$

Da die Wurzel positiv zu ziehen ist, wird diese Gleichung genau für

$$\cos u = \frac{f \cdot k}{c + fk} \tag{5–3}$$

befriedigt. —

Außer dieser trigonometrischen Lösung besteht noch eine algebraische, die man durch Quadrieren der Gleichung (5–2) erhält:

$$(f \cdot k)^2 \cdot ((x_1 - x)^2 + (y_1)^2) = (x_1 - x)^2 \cdot (c + f \cdot k)^2 \tag{5–4}$$

d. h.

$$(x_1 - x)^2 \cdot ((c + f \cdot k)^2 - (f \cdot k)^2) = (y_1)^2 \cdot (f \cdot k)^2 \tag{5–5}$$

oder

$$(x_1 - x) = \sqrt{\frac{(y_1)^2 \cdot (f \cdot k)^2}{(c + f \cdot k)^2 - (f \cdot k)^2}} \tag{5–6}$$

Da nur Lösungen der Form $(x_1 - x) > 0$ in Frage kommen, ergibt sich als eindeutiges Resultat:

$$x = x_1 - y_1 \cdot f \cdot k \cdot (+) \sqrt{\frac{1}{(c + f \cdot k)^2 - (f \cdot k)^2}} \tag{5–7}$$

x stellt eine Weglänge dar und kann deshalb nicht kleiner als Null sein. Das bedeutet, daß für alle Ergebnisse

$$x_1 - y_1 \cdot f \cdot k \cdot (+) \sqrt{\frac{1}{(c + f \cdot k)^2 - (f \cdot k)^2}} < 0 \tag{5–8}$$

$x = 0$ substituiert werden muß.

Es bleibt allerdings noch zu zeigen, daß in dem so gefundenen Punkt tatsächlich die Kostenfunktion ihr Minimum annimmt.

Dazu beweisen wir, daß die zweite Ableitung der Kostenfunktion in $Q = (x, 0)$ größer als Null ist.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = -(c + f \cdot k)\left(\frac{(-1)}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1)^2}} + \right.$$

$$\left. + (x_1 - x)\frac{(2(x_1 - x) \cdot (-1)}{(-2)\,[(x_1 - x)^2 + (y_1)^2]^{3/2}}\right) \tag{5–9}$$

$$\frac{d^2C}{dx^2} = (c + f \cdot k)\left(\frac{1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2}} - \frac{(x_1 - x)^2}{(\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2})^3}\right) \tag{5–10}$$

$$= (c + f \cdot k)\left(\frac{(x_1 - x)^2 + y_1^2 - (x_1 - x)^2}{(\sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2})^3}\right) > 0\,. \tag{5–11}$$

q.e.d.

Die beiden möglichen Grenzfälle lassen sich aus der Lösungsgleichung (5–7) ablesen. Für steigende Baukosten c strebt die Wurzel gegen Null, d. h. x gegen x_1.

In Worten: Bei außerordentlich hohen Baukosten soll die zu bauende Wegverbindung vom Punkte P_1 zum Weg g nahezu senkrecht zu ihm verlaufen. Dieses Ergebnis mußte erwartet werden, weil die rechtwinklige Verbindung von P_1 mit g die kürzest mögliche ist. Ein nicht-triviales Resultat ist die Auflösung von (5–7) für $x = 0$:

Gilt für die gegebenen Konstanten die Beziehung

$$x_1^2 \leq \frac{y_1^2 f^2 k^2}{(c + f \cdot k)^2 - (f \cdot k)^2}, \tag{5–12}$$

so lohnt eine Einbeziehung des Weges g in das Bauprogramm nicht, man verbindet also P_1 mit P_2 direkt.

Um die Empfindlichkeit der gefundenen Lösung zu untersuchen, bestimmen wir mittels der in (5–1) gegebenen Kostenfunktion die prozentuale Verteuerung der Gesamtkosten für alle Punkte innerhalb des Definitionsbereiches $0 \leq x \leq x_1$ gegenüber den Kosten der optimalen Lösung, wie sie oben berechnet wurde. Zum Zwecke der graphischen Darstellung müssen für die allgemeinen Konstanten der Kostenfunktion konkrete Zahlenwerte[29] eingesetzt werden.

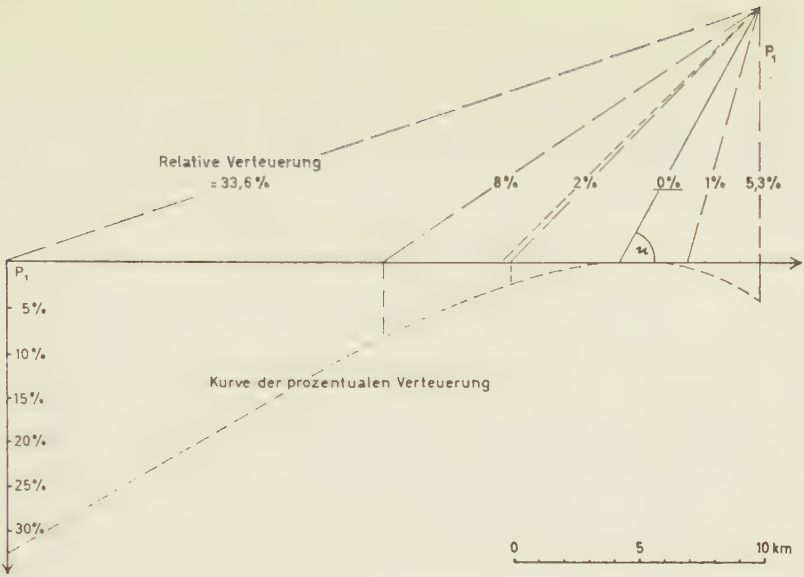
Nehmen wir als praktisches Beispiel an, daß eine Stadt (P_2) aus einem nahe gelegenen Steinbruch (P_1) mit Baumaterial versorgt werden soll. In 10 Kilometer Entfernung führe eine geradlinige Straße zur Stadt. Von jenem Punkt der Straße, der dem Steinbruch am nächsten liegt (d. h. 10 km Abstand), sei die Entfernung bis zur Stadt 30 Kilometer.

Die jährlichen Kosten pro km gebauter Straße, die sich aus Kapitalverzinsung und laufenden Instandhaltungskosten ergeben, sollen DM 12 000,— betragen, die Betriebskosten seien mit DM 0,20 pro Tonne und Kilometer angenommen, daß jährlich zu transportierende Volumen schließlich werde auf 60 000 Tonnen veranschlagt. Es sind also

$$P_2 = (0, 0);\ P_1 = (30{,}10);\ c = 12\,000;\ k = 0{,}20;\ f = 60\,000\ .$$

Bei ökonomisch optimaler Linienführung muß der geplante Weg von P_1 nach P_2 auf 24,23 Kilometern die bereits bestehende Straße benutzen. In diesem Falle betragen die jährlichen Gesamtkosten DM 568 500.—. Figur 5.2 zeigt außer der optimalen Linienführung einige Alternativ-Strecken sowie deren relative Verteuerung.

[29] Nach P. Friedrich 1956, S. 16 (ausschließlich *f*).

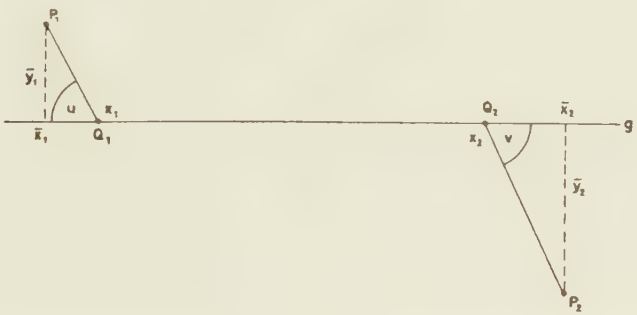


Figur 5.2

52. Verbindung zweier Quellpunkte unter Einschluß einer bestehenden Verkehrsstrecke

Der Sonderfall, daß der Punkt P_2 auf dem Weg g liegt, soll nun verallgemeinert werden, indem diese Voraussetzung gestrichen wird. Dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: Die beiden Punkte P_1 und P_2 liegen auf der gleichen bzw. auf entgegengesetzten Seiten von g.

Wir beginnen mit dem letzteren Fall (I). (Figur 5.3.)



Figur 5.3

I. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte, die durch einen Weg verbunden werden sollen. Ihre Positionen sollen sich auf entgegengesetzten Seiten einer bereits bestehenden Wegstrecke g befinden. Gesucht werden Ein- und Austrittsstelle Q_1 und Q_2 des Weges von P_1 nach P_2, wenn dieser der wirtschaftlich günstigsten Linienführung entspricht.

Das Koordinatennetz werde so gelegt, daß g in der x-Achse liegt. Wir definieren:

$$P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1) \qquad \text{Es ist:}$$
$$P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2) \qquad g = 0$$
$$Q_1 = (x_1, y_1) \qquad y_1 = 0$$
$$Q_2 = (x_2, y_2) \qquad y_2 = 0$$

Nach Figur 5.3 gestaltet sich die Kostenfunktion wie folgt:

$$C = (c + f \cdot k)\left(\sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \bar{y}_1^2} + \sqrt{(\bar{x}_2 - x_2)^2 + \bar{y}_2^2}\right) + (x_2 - x_1) \cdot f \cdot k \tag{5-13}$$

Berechnung der partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial C}{\partial x_1} = (c + f \cdot k) \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \bar{y}_1^2}} (f \cdot k) \tag{5-14}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x_2} = (c + f \cdot k) \cdot \frac{-(\bar{x}_2 - x_2)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - x_2)^2 + \bar{y}_2^2}} + f \cdot k \tag{5-15}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} = (c + f \cdot k) \frac{\bar{y}_1^2}{(\sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + \bar{y}_1^2})^3} \tag{5-16}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} = (c + f \cdot k) \frac{\bar{y}_2^2}{(\sqrt{(\bar{x}_2 - x_2)^2 + \bar{y}_2^2})^3} \tag{5-17}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_1} = 0\,. \tag{5-18}$$

Von dem Gleichungssystem der partiellen Ableitungen lassen sich eine Reihe interessanter Ergebnisse ablesen:

(1) Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum der Kostenfunktion werden, da die Wurzeln positiv zu ziehen sind, durch genau zwei Punkte erfüllt, nämlich

$$Q_1 = (x_1, 0)\,, \quad \text{wo} \quad x_1 = \bar{x}_1 + \bar{y}_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{f \cdot k} + 1\right)^2 - 1}} \tag{5-19}$$

$$Q_2 = (x_2, 0), \quad \text{wo} \quad x_2 = \bar{x}_2 - \bar{y}_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{f \cdot k} + 1\right)^2 - 1}} \,. \tag{5–20}$$

(2) Die beiden Punkte erfüllen auch die hinreichenden Bedingungen für ein Minimum, denn die Funtkionaldeterminante der zweiten Ableitungen D

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \tag{5–21}$$

ist offensichtlich positiv, mithin haben wir in Q_1, Q_2 eine eindeutige Lösung dieser Minimalaufgabe gefunden.

(3) Wie die Lösung zeigt, ist Q_1 von der Lage des Punktes P_2 und Q_2 von der Lage des Punktes P_1 unabhängig, die Aufgabe in den Variablen x_1 und x_2 zerfällt also in zwei voneinander unabhängige Aufgaben je einer Variablen, von denen jede dem Typ des zuerst behandelten Problems (einer der Punkte liegt auf g) entspricht.

(4) An Stelle der Punkte Q_1 und Q_2 läßt sich die Lösung wieder trigonometrisch angeben, wiederum als Kosinus der Einfallswinkel u und v (siehe Figur 5.3):

$$\begin{aligned} \cos u &= \frac{fk}{c + f \cdot k} \\ \cos v &= \frac{fk}{c + f \cdot k} \end{aligned} \tag{5–22}$$

Das bedeutet, daß die beiden Einfallswinkel gleich sind, d. h. die beiden Teile $\overline{P_1 Q_1}$ znd $\overline{P_2 Q_2}$ des Weges von P_1 nach P_2 sind parallel.

(5) Das ermöglicht in der Praxis eine außerordentlich simple Konstruktion: Man erhält den die Kosten minimierenden Streckenzug, indem man durch P_1 und P_2 zwei Strecken legt, die beide mit dem Verkehrsweg g den Winkel u

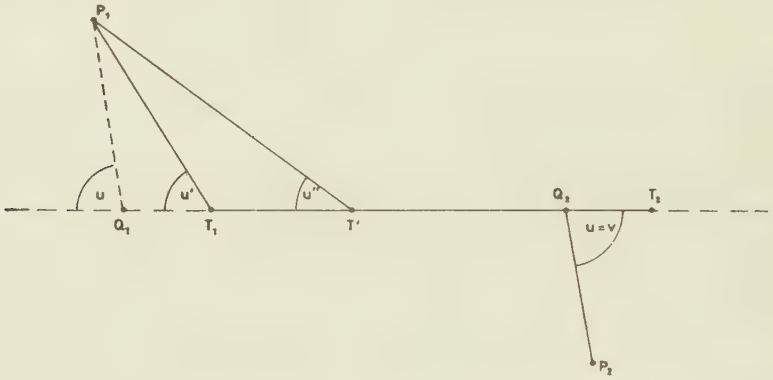
$$u = \text{arc cos} \frac{fk}{c + f \cdot k} \; (u \text{ hier im Bogenmaß gemessen})$$

bilden.

Die bis hier entwickelte Lösung bedarf zweier Ergänzungen:

A) Falls die Wegstrecke g durch zwei Punkte T_1 bzw. T_2 derart begrenzt wird, daß einer der beiden Lösungspunkte Q_1 und Q_2 außerhalb der Strecke $g = \overline{T_1 T_2}$, aber auf deren Verlängerung liegt, so sind Q_1 bzw. Q_2 durch T_1

bzw. T_2 zu ersetzen. Denn wie Figur 5.4 zeigt, sind die durch den Neubau der Strecke $\overline{P_1T_1}$ entstehenden Kosten offenbar geringer als die der Doppelstrecke $\overline{P_1Q_1T_1}$. Andererseits würde eine Strecke von P_1 nach einem Punkt T' auf $\overline{T_1T_2}$ mit $T_1 \neq T'$ die Kosten erhöhen, weil der zugehörige Einfallswinkel u'' noch stärker von dem optimalen Winkel u abweicht als der Einfallswinkel u' der Strecke $\overline{P_1T_1}$.



Figur 5.4

B) Der mathematische Formalismus führt unter Umständen zu einem Resultat $x_2 < x_1$ und rechnet dabei die Strecke $\overline{Q_1Q_2} = (x_2 - x_1)$ negativ. Da für die praktische Lösung nur positiv gemessene Strecken in Frage kommen, gilt es festzustellen, welche Linienführung einerseits nur positiv gemessene Strecken enthält und andererseits der errechneten abstrakten (man könnte sagen: virtuellen) Lösung am nächsten kommt. Bezüglich des zweiten Kriteriums sei daran erinnert, daß bei wachsender Abweichung des Punktes Q_i $(i = 1,2)$ von seiner optimalen Lage die Gesamtkosten, soweit sie von Q_i abhängen, monoton wachsen. Man erhält die gesuchte Linienführung für $(x_2 - x_1) = 0$, d. h. P_1 und P_2 sind geradlinig zu verbinden, die Verbindungslinie schneidet g in $Q_1 = Q_2$. In Formeln ausgedrückt:

Für $x_1 > x_2$

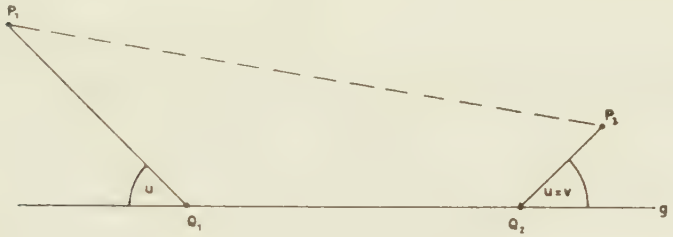
d. h.
$$\bar{x}_1 + \bar{y}_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{f \cdot k} + 1\right)^2 - 1}} >$$

$$> \bar{x}_2 - \bar{y}_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{f \cdot k} + 1\right)^2 - 1}} \tag{5–23}$$

oder $$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{c}{f \cdot k} + 1\right)^2 - 1}} > 0 \tag{5–24}$$

ist die direkte Verbindung $\overline{P_1 P_2}$ die optimale Lösung des Problems, mit anderen Worten: Die Einbeziehung der bestehenden Strecke g in den zu bauenden Verkehrsweg von P_1 nach P_2 lohnt nicht.

II. Es bleibt jetzt noch die Möglichkeit zu untersuchen, daß die beiden Punkte P_1 und P_2 auf der gleichen Seite von g liegen. Bezieht man g in die Kostenrechnung mit ein, so läuft der Rechenprozeß parallel dem für Fall I und man bekommt je nach Wunsch entweder die Punkte Q_1 und Q_2 oder aber die Einfallswinkel $u = v$ als Lösung (siehe Figur 5.5).



Figur 5.5

Die bei Fall I abschließend diskutierten Grenzfälle müssen hier jedoch noch einmal gesondert behandelt werden. Ergibt die rechnerische Lösung das virtuelle Resultat $x_2 < x_1$, so überschneiden sich die Wegstrecken $\overline{P_1 Q_1}$ und $\overline{P_2 Q_2}$, und die optimale Lösung ist wie in Fall I die direkte Verbindungsstrecke $\overline{P_1 P_2}$. Es macht jedoch die Eigenart dieses zweiten Falles aus, daß auch bei einer reellen Lösung Q_1, Q_2, also $x_2 > x_1$, die Direktverbindung $\overline{P_1 P_2}$ möglicherweise kostengünstiger ist. Diese eventuell optimale Lösung wird deshalb im hier diskutierten Rechenprozeß nicht erfaßt, weil die Kostenfunktion unter der Voraussetzung aufgestellt worden ist, daß g Teil des gesuchten Streckenzuges ist. Eine derartige Einschränkung des Rechenansatzes aber bedingt automatisch, daß die Rechnung nur eine g

einbeziehende Lösung liefern kann. Die tatsächlich optimale Lösung erhält man durch Kostenvergleich der beiden Wege $\overline{P_1Q_1Q_2P_2}$ und $\overline{P_1P_2}$. —

53. Optimale Linienführung bei gegebenem Verkehrsnetz

Nachdem nun die einfachsten Fälle von Linienführungsproblemen bei schon bestehendem Verkehrsnetz untersucht worden sind, soll jetzt eine allgemeinere Situation behandelt werden:

Gegeben seien zwei Punkte $P_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ und $P_2 = (\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ sowie eine zwischen ihnen bestehende Verkehrsspannung f. Gegeben sei außerdem ein Verkehrsnetz beliebiger Gestalt.

Gesucht ist die hinsichtlich der Kosten optimale Linienführung eines zu bauenden Verkehrsweges von P_1 nach P_2[30].

Wir bezeichnen das gegebene Verkehrsnetz mit M. M kann dargestellt werden als Menge seiner Netzglieder s_i:

$$M = \{s_i\},\ (i = 1, 2, \ldots)\,.$$

Der rechnerische Ansatz für die Lösung des Problems sieht vor, daß der zu bauende Streckenzug von P_1 nach P_2 einen gewissen Teil der Netzglieder benutzt. Da sich nicht von vornherein entscheiden läßt, welche der schon bestehenden Netzglieder in die optimale Lösung eingehen werden, müßte im Ansatz jede geordnete Untermenge M' von M in Betracht gezogen werden. Theoretisch würde das bedeuten, daß ebenso viele Einzellösungen zu berechnen wären wie M geordnete Untermengen M' besitzt (einschließlich der leeren Menge Φ, was der Direktverbindung $\overline{P_1P_2}$ entspräche), um dann einen Kostenvergleich dieser Einzelresultate durchzuführen. In der Praxis ergibt jedoch die einfache Betrachtung der Geometrie des Verkehrsnetzes, daß jeweils nur einige wenige Kombinationen von Netzgliedern für den ökonomisch optimalen Streckenzug in Frage kommen. In einer an die Untersuchung des Problems anschließenden Betrachtung wird darüber hinaus eine Methode entwickelt, die uns in die Lage versetzen wird, von vornherein zu entscheiden, ob ein gegebenes Netzglied s überhaupt in die Untersuchung einbezogen werden muß.

Es sei $M' = \{s_i / i = 1, \ldots, n\}$ eine geordnete Teilmenge der Menge M. Wir berechnen nun die — relativ! — optimale Lösung unter der Annahme, daß der gesuchte Streckenzug über die Netzglieder von M' zu führen ist, und

[30] Ohne Änderung des bereits bestehenden Verkehrsflusses.

Figur 5.6

zwar in der Reihenfolge ihrer Anordnung. Figur 5.6 zeigt diese Voraussetzung.

Die Lösung wird eine Punktmenge L sein

$$L = \{Q_{ij} \mid i = 1, \ldots, n;\ j = 1, 2\} \tag{5–25}$$

mit der Eigenschaft, daß der gesuchte Streckenzug im Punkte Q_{i1} das Netzglied s_i betritt und im Punkte Q_{i2} wieder verläßt. Der Weg verläuft also zwischen Q_{i1} und Q_{i2} auf dem Netzglied s_i und zwischen $Q_{i+1,1}$ und $Q_{i+1,2}$ auf dem Glied s_{i+1}, während die Strecke von Q_{i2} nach $Q_{i+1,1}$ neu zu bauen wäre.

Für die Aufstellung der Kostenfunktion werden noch benötigt die Koordinaten der Lösungspunkte Q_{ij}

$$Q_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}) ,$$

weiterhin die Gleichungen der Geraden g_i, die durch die (geradlinigen) Netzglieder s_i definiert werden:

$$y_i = a_i x_i + b_i$$

und die Endpunkte der Strecken s_i auf den Geraden g_i:

$$s_i = \overline{T_{i1} T_{i2}} .$$

531. Aufstellung der Kostenfunktion

Nach Voraussetzung durchläuft der gesuchte Streckenzug von P_1 nach P_2 die Punkte

$$P_1, Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22} \ldots . Q_{i2}, Q_{i+1,1} \ldots Q_{n1}, Q_{n2}, P_2 .$$

Die Länge l dieses Streckenzuges läßt sich aus den Koordinaten der Punkte berechnen:

$$l = \sqrt{(\bar{x}_1 - x_{11}) + (\bar{y}_1 - y_{11})^2} + \sqrt{(x_{11} - x_{12})^2 + (y_{11} - y_{12})^2} + \\ + \sqrt{(x_{21} - x_{12})^2 + (y_{21} - y_{12})^2} + \cdots + \sqrt{(x_{n2} - \bar{x}_2)^2 + (y_{n2} - \bar{y}_2)^2} \tag{5–26}$$

Die Glieder der Summe zerfallen in zwei Typen: Sie messen Strecken, die entweder auf Netzgliedern verlaufen oder benachbarte Netzglieder (benachbart im Sinne der Anordnung der Menge M') verbinden. Wir summieren beide Typen getrennt und erhalten:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 + (y_{i1} - y_{i2})^2} + \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (y_{i2} - y_{i+1,1})^2} \tag{5–27}$$

In der zweiten Summe wurden, um das Summenzeichen unbeschränkt anwenden zu können, für die beiden Fixpunkte P_1 und P_2 die Symbole P_0 und P_{n+1} eingeführt, es ist also

$$\begin{aligned} x_{02} &= \bar{x}_1 & y_{02} &= y_1 \\ x_{n+1,1} &= \bar{x}_2 & y_{n+1,1} &= \bar{y}_2 . \end{aligned} \tag{5–28}$$

Die Punkte Q_{ij} liegen auf den durch die Netzglieder s_i definierten Geraden g_i, ihre Koordinaten genügen also den zugehörigen Geradengleichungen

$$\begin{aligned} y_{i1} &= a_i x_{i1} + b_i \\ y_{i2} &= a_i x_{i2} + b_i . \end{aligned}$$

Wir setzen deshalb

$$a_0 = a_{n+1} = 0$$

$$b_0 = \bar{y}_1,\ b_{n+1} = \bar{y}_2\,.$$

Eingesetzt in (5–28) ist die Länge des Streckenzuges nun gegeben durch den Ausdruck

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 + (a_i x_{i1} + b_i - a_i x_{i2} - b_i)^2} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (a_i x_{i2} + b_i - a_{i+1} x_{i+1,1} - b_{i+1})^2}$$

$$l = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 \cdot (1 + a_i^2)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (a_i x_{i2} - a_{i+1} x_{i+1,1} + b_i - b_{i+1})^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - x_{i2})\,(1 + a_i^2)^{1/2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (a_i x_{i2} - a_{i+1} x_{i+1,1} + b_i - b_{i+1})^2}\,. \qquad (5\text{–}29)$$

Die Kostenfunktion ist jetzt verhältnismäßig einfach zu formulieren: Alle Teilstrecken, die auf Netzgliedern laufen, erfordern in der Gesamtrechnung nur die reinen Betriebsaufwendungen, die, wie erinnerlich, durch das Produkt $(f \cdot k)$ gegeben sind, während für die die Netzglieder verbindenden Strecken noch die Bau- und Instandhaltungskosten c hinzutreten.

Die Kostenfunktion lautet also:

$$C = (f \cdot k) \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_{i1} - x_{i2})\,(1 + a_i^2)^{1/2} +$$

$$+ (c + f \cdot k) \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (a_i x_{i2} - a_{i+1} x_{i+1,1} + b_i - b_{i+1})^2}\,. \qquad (5\text{–}30)$$

Insofern jeder Punkt der Lösungspunktmenge L Verknüpfungspunkt einer Strecke, die auf einem Netzglied verläuft, mit einer Strecke, die dieses Netzglied mit dem ihm benachbarten verbindet, ist, kann man alle Punkte

als einander äquivalent betrachten, man erhält deshalb die allgemeine partielle Ableitung erster Ordnung durch Differentation von C nach (etwa) x_{i1}:

$$\frac{\partial C}{\partial x_{i1}} = \mathfrak{f} \cdot k \cdot \sqrt{1 + a_i^2} + \\ + (c + f \cdot k) \frac{-(x_{i-1,2} - x_{i1}) - a_i(a_{i-1}x_{i-1,2} - a_i x_{i1} + b_{i-1} - b_i)}{\sqrt{(x_{i-1,2} - x_{i1})^2 + (a_{i-1}x_{i-1,2} - a_i x_{i1} + b_{i-1} - b_i)^2}}. \quad (5\text{–}31)$$

532. Zerlegung des Problems in seine Einzelteile

Zur Erleichterung des weiteren Rechenganges wollen wir annehmen, daß die Abszisse des Koordinatensystems mit der durch das Netzglied s_i definierten Geraden g_i zusammenfällt, d. h., daß gilt: $a_i = b_i = 0$.

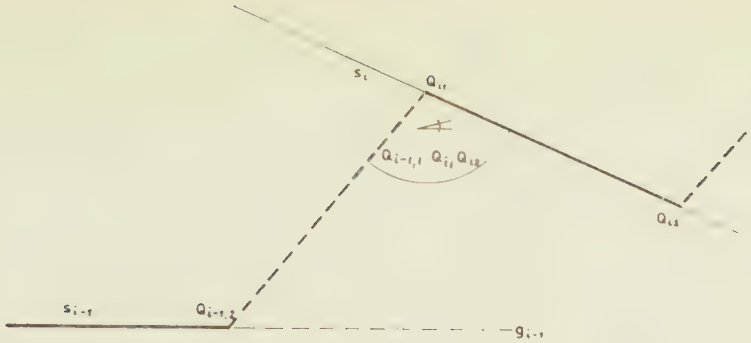
Dann ist

$$\frac{\partial C}{\partial x_{i1}} = f \cdot k + (c + f \cdot k) \frac{(x_{i-1,2} - x_{i1})}{\sqrt{(x_{i-1,2} - x_{i1})^2 + (a_{i-1}x_{i-1,2} + b_{i-1})^2}}. \quad (5\text{–}32)$$

Es zeigt sich, daß das hier vorgelegte komplexe Problem in eine Reihe von einfachen Problemen zerfällt, wie sie bereits eingangs dieses Kapitels behandelt wurden. Denn setzt man die in (5–32) gegebene erste Ableitung gleich Null, so besagt die trigonometrische Interpretation, daß für $x_{i-1,2} < x_{i1}$ der Kosinus des Winkels zwischen den beiden durch Q_{i1} verknüpften Strecken (d. h. der Winkel $\sphericalangle\, Q_{i-1,2}Q_{i1}Q_{i2}$) gleich dem negativen Quotienten aus Betriebs- und Gesamtkosten pro Längeneinheit sein muß (siehe Figur 5.7):

$$\cos \sphericalangle\, Q_{i-1,2}Q_{i1}Q_{i2} = \frac{-f \cdot k}{c + f \cdot k}. \quad (5\text{–}33)$$

Diese Bedingung ist notwendig und gilt für alle im Streckenzug auftretenden Winkel. Mit anderen Worten:
Die Winkel, unter denen die neu zu bauenden Verbindungsglieder in die bestehenden Netzglieder einmünden sollen, sind alle gleich und durch Gleichung (5–33) gegeben. Man sieht jedoch sofort, daß die Bedingung nur dann erfüllt werden kann, wenn alle in die Rechnung einbezogenen Netzglieder s_i parallel verlaufen. Die Forderung, daß zwei nicht-parallele Geraden mit einer zwischen ihnen gezogenen Verbindungsstrecke den gleichen vorgegebenen Winkel bilden, kann im allgemeinen nur im Schnittpunkt der beiden Geraden erfüllt werden, d. h., es existiert keine nicht-triviale Lösung. In die Überlegungen muß nun eine weitere Voraussetzung eingeführt werden, nämlich die Tatsache, daß jedes Netzglied s_i durch zwei Punkte T_{i1} und T_{i2} auf g_i begrenzt wird. Sei t_i eine beliebige Verbindungsstrecke zwischen s_i



Figur 5.7

und s_{i-1}. In dem man die beiden Winkel, die t_i mit s_i beziehungsweise s_{i-1} bildet, kostendegressiv im Sinne des Abschnitts 5.1 abwechselnd auf den geforderten Wert einrichtet, bewegt sich t_i entweder in Richtung auf den Schnittpunkt der Geraden g_i und g_{i-1} oder aber entfernt sich von diesem[31]. Um das zu entscheiden, studieren wir die Situation in voller Allgemeinheit und unabhängig vom übrigen Netz. Es seien also gegeben zwei sich schneidende Geraden und irgendeine Verbindungsstrecke zwischen ihnen sowie die Größe der beiden (gleichgroßen) Winkel w, unter welchen die Verbindungsstrecke die beiden Geraden treffen soll. Die zunächst beliebig vorgegebene Verbindungsstrecke bezeichnen wir mit $\overline{Q_1Q_2}$ und den Schnittwinkel der beiden Geraden g_1 und g_2 mit z. Führt man nun den oben beschriebenen Iterationsprozeß durch, indem man etwa Q_1 festhält und Q_2 so weit auf g_2 wandern läßt, bis der Winkel in Q_2 den geforderten Wert w angenommen hat, dann die neue Position von Q_2 festhält und Q_1 wandern läßt und so fort, so bewegt sich dabei (siehe Figur 5.8) die Verbindungsstrecke genau dann auf den Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 zu, wenn gilt:

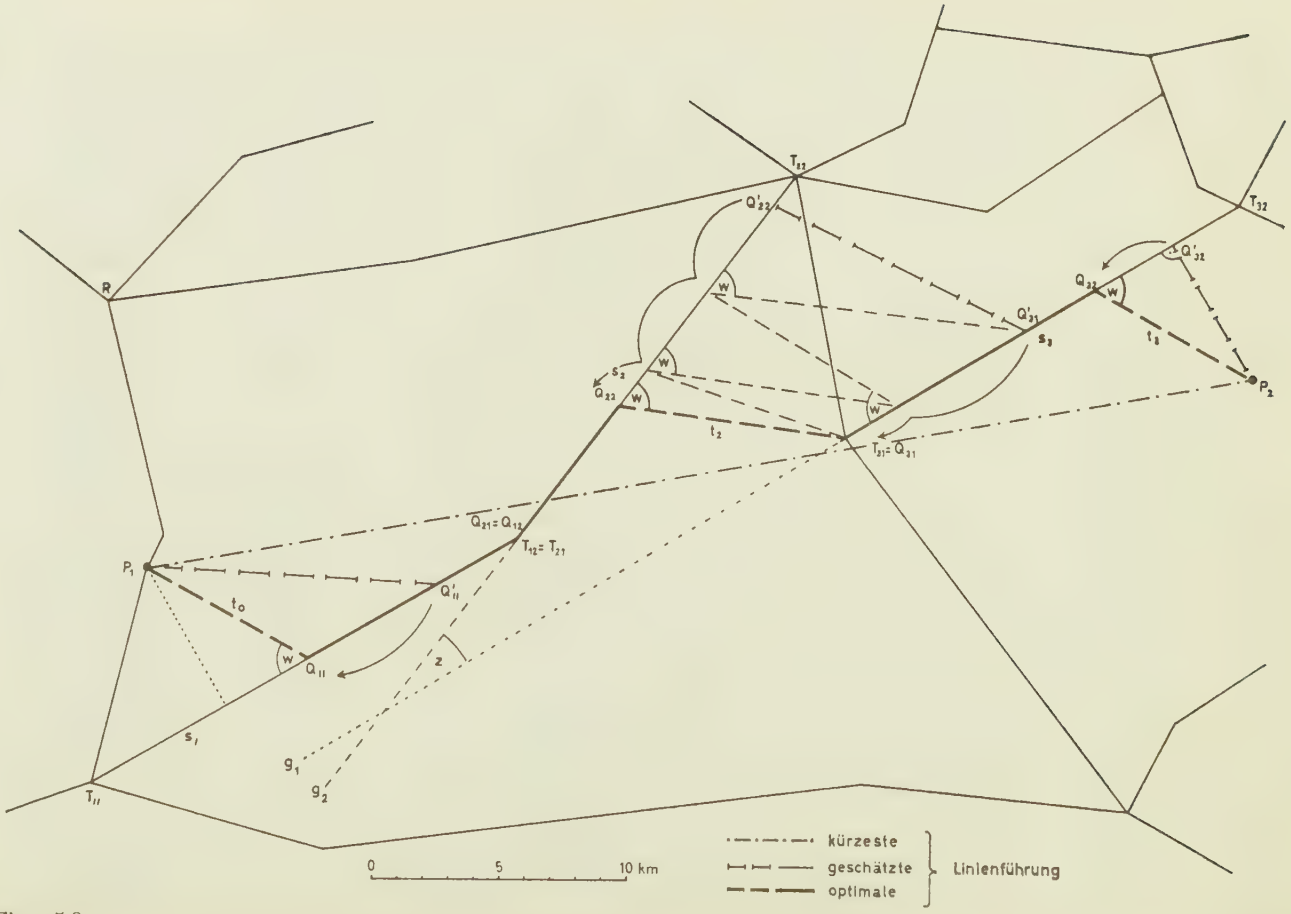
$$w > \frac{180 - z}{2} \tag{5–34}$$

Gilt in (5–34) das Gleichheitszeichen, so ist jede zur Winkelhalbierenden von z senkrechte Verbindungsstrecke eine Lösung des Problems. Für

$$w < \frac{180 - z}{2}$$

schließlich entfernt sich die Verbindungsstrecke bei fortlaufender Iteration vom Schnittpunkt der Geraden.

[31] Wir nehmen an, daß Ein- und Austrittswinkel beide innerhalb des von g_i, g_{i-1} und t_i gebildeten Dreiecks liegen, da sonst die Lösung trivial ist. —


R
T_{11}
T_{12}
T_{32}
Q'_{22}
Q'_{32}
Q_{32}
Q'_{31}
s_3
t_3
P_2
s_2
Q_{22}
t_2
$T_{21}=Q_{21}$
$Q_{21}=Q_{12}$
$T_{12}=T_{21}$
P_1
t_0
Q'_{11}
Q_{11}
z
s_1
g_1
g_2
T_{11}
w
0
5
10 km
kürzeste
geschätzte
optimale
Linienführung

Figur 5.8

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem konkreten Fall die Beziehung

$$w = \frac{180 - z}{2}$$

besteht, ist gleich Null. Die Alternative, nämlich

$$w \neq \frac{180 - z}{2} ,$$

führt zu dem oben beschriebenen Iterationsprozeß. Da nun in einem Verkehrsnetz alle Netzglieder begrenzt sind, kommt die iterative Verschiebung einer Verbindungslinie in dem Moment zum Stillstand, wo ihre Endpunkte Q die die Netzglieder begrenzenden Punkte T erreichen. Dabei kann die Iteration schon dann unterbrochen werden, wenn nur ein Q seine Grenzposition T erreicht hat, das hängt von den jeweiligen geometrischen Gegebenheiten ab. Von dem obengenannten Sonderfall einmal abgesehen, befindet sich also, mathematisch gesprochen, kein relatives Minimum in dem durch die Punkte T begrenzten Definitionsbereich, vielmehr liegt das gesuchte Minimum auf dem Rande desselben (daß kein zweites Minimum existieren kann, bedarf keiner Erläuterung).

Betrachten wir nun einen Streckenzug zwischen P_1 und P_2. Nach Konstruktion setzt er sich zusammen aus den vorgegebenen Netzgliedern $s_1, \ldots, s_n$ und den sie verbindenden Strecken, die hier entsprechend ihrer Reihenfolge durch $t_o, \ldots, t_n$ bezeichnet werden sollen. Soll dieser Streckenzug derart variiert werden, daß die mit ihm verbundenen Kosten minimal werden, so gelingt das durch Verschiebung der Verbindungsglieder t_i gemäß den vorausgegangenen Überlegungen. Da der Prozeß eindeutig ist, ist auch die so erzielte Lösung eindeutig. Selbst dann, wenn sich die Geraden zweier benachbarter Netzglieder unter dem Winkel

$$z = 180 - 2n$$

schneiden sollten, oder, um auch den anderen Spezialfall einzubeziehen, parallel laufen, ist nur die optimale Linienführung mehrdeutig, die Kostenlösung dagegen eindeutig.

533. Ein Beispiel

Figur 5.8 zeigt die graphische Konstruktion des optimalen Streckenzuges aus einem beliebig vorgegebenen. Die Werte für Baukosten, Betriebskosten

und Verkehrsvolumen sind die gleichen wie im Beispiel der Figur 5.2[32], die Kilometerangaben wurden dem vorgegebenen Netz entnommen. Insgesamt wurden die Kosten für vier verschiedene Linienführungen von P_1 nach P_2 berechnet, und zwar im einzelnen

(I) für den Neubau einer geradlinigen Verbindung von P_1 nach P_2;

(II) für den Streckenzug mit minimalen Baukosten. Dabei ist P_2 auf kürzestem Wege mit dem Netz zu verbinden, während der Verkehr im übrigen auf dem Netz verläuft (in der Figur 5.8 ist es der Weg P_1-R-T_{32}-Q'_{32}-P_2);

(III) für eine willkürliche Schätzung der Trasse (in der Figur der Weg $P_1Q'_{11}$-Q'_{22}-Q'_{31}-Q'_{32}-P_2);

(IV) für die optimale Linienführung (in der Figur der Weg P_1-Q_{11}-Q_{22}-Q_{31}-Q_{32}-P_2). Sie wurde graphisch mit Hilfe des oben beschriebenen Iterationsverfahrens konstruiert, und zwar unter der Voraussetzung, daß die Netzglieder s_1, s_2, s_3 in die Lösung einzubeziehen seien. Die Optimalität gilt also nur unter dieser Voraussetzung, eine andere Kombination von Netzgliedern erlaubt möglicherweise eine noch günstigere Linienführung.

Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	km-Länge des Weges auf dem Netz	km-Länge des Weges auf neuen Strecken	Betriebkosten auf dem Netz (DM)	Bau- und Betriebskosten der neuen Strecken (DM)
(I)	—	44,2	—	1 058 000
(II)	63,6	6,14	764 000	1 471 000
(III)	26,9	28,74	323 000	690 000
(IV)	27,9	23,3	335 000	559 000

	Totale Weglänge	Totale Kosten (DM)
(I)	44,20 km	1 058 000
(II)	69,74 km	910 000
(III)	55,64 km	1 013 000
(IV)	51,20 km	894 000

Vergleicht man die Zahlen, so fällt auf, daß die Kalkulation gegenüber dem Neubau von Strecken im Netz außerordentlich empfindlich ist. In Anbe-

[32] Nach P. Friedrich 1956, S. 16 (ausschließlich *f*).

tracht der geringen jährlichen Verkehrsmenge kommt diese Beobachtung jedoch nicht unerwartet.

534. Eine zweidimensionale Abschätzung für die gesuchte Linienführung

Es soll jetzt eine Methode entwickelt werden, die es erlaubt, zu entscheiden, welche Netzglieder für einen zu bauenden Streckenzug überhaupt in Frage kommen. Eine räumliche Abschätzung gelingt durch folgende Überlegung:

Jeder Punkt Q des zu bauenden Streckenzuges darf von den gegebenen Punkten P_1, P_2 nur so weit entfernt sein, daß die direkte Verbindung von P_1 nach Q und von Q nach P_2 selbst unter der Annahme, daß sie ganz auf Gliedern des gegebenen Netzes verläuft, in der Kostenrechnung nicht teurer zu stehen kommt als Neubau und Betrieb einer direkten Verbindung zwischen P_1 und P_2. Offenbar bilden alle jene Punkte Q, für die dieser Kostenvergleich unentschieden ausfällt, eine Grenzlinie, jenseits welcher kein Punkt mehr für den geplanten Streckenzug in Frage kommt. Diese Überlegung soll nun mathematisch formuliert werden.

Es sei die Strecke $\overline{P_1P_2}$ von der Länge d. Dann betragen die Kosten der Direktverbindung der beiden Punkte:

$$C_1 = (c + f \cdot k)\, d \tag{5–35}$$

Es sei Q ein Punkt der gesuchten Grenzlinie und e_1 bzw. e_2 die Längen der Strecken $\overline{P_1Q}$ und $\overline{QP_2}$. Da die Grenzlinie für alle möglichen Positionen von Netzgliedern Gültigkeit haben soll, muß für ihre Berechnung der Extremfall angenommen werden, daß $\overline{P_1Q}$ und $\overline{QP_2}$ ganz auf Netzgliedern verlaufen.

Die in diesem Falle entstehenden Kosten werden nur durch den Verkehrsbetrieb verursacht und betragen demnach

$$C_2 = f \cdot k(e_1 + e_2) \tag{5–36}$$

Als Punkt der gesuchten Grenzlinie gilt für Q:

$$C_1 = C_2, \text{ d. h. } (c + f \cdot k)d = f \cdot k(e_1 + e_2) \tag{5–37}$$

oder

$$(e_1 + e_2) = d\,\frac{(c + f \cdot k)}{f \cdot k} \tag{5–38}$$

Diese Gleichung definiert aber, wie von der Analytischen Geometrie her bekannt ist, eine Ellipse, deren Brennpunkte durch P_1 und P_2 und deren Halbachsen durch

$$r_1 = \tfrac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

bzw.
$$r_2 = \sqrt{(e_1 + e_2)^2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{d^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{(e_1 + e_2)^2 - d^2} \qquad (5\text{–}39)$$

gegeben sind. Legt man das Koordinatensystem derart, daß die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in der Abszisse liegt und vom Nullpunkt halbiert wird, so lautet die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}(e_1 + e_2)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}[(e_1 + e_2)^2 - d^2]} = 1 \qquad (5\text{–}40)$$

oder, unter Verwendung der Beziehung (5–38)

$$\frac{x^2}{\frac{d^2}{4}\left(\frac{c + f\cdot k}{f\cdot k}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{d^2}{4}\left[\left(\frac{c + f\cdot k}{f\cdot k}\right)^2 - 1\right]} = 1\,. \qquad (5\text{–}41)$$

(Siehe Figur 5.9)

Es muß betont werden, daß die Ellipse im streng mathematischen Sinne keine Grenzlinie ist, sondern nur eine Schrankenlinie. Das bedeutet: Jene Netzteile, die außerhalb der Ellipse liegen, kommen für eine ökonomisch optimale Linienführung nicht in Frage. Es kann jedoch durchaus der Fall sein, daß es auch innerhalb der Ellipse noch Netzteile gibt, die auf Grund ihrer Position von der Trassierung auszuschließen sind.

Bestehen auch noch nach der durch die Ellipse erzielten Einschränkung des Netzes mehr als eine mögliche Kombination von Netzgliedern für den gesuchten Streckenzug, so ergibt sich die endgültige Lösung durch einen Kostenvergleich der verschiedenen Einzelergebnisse.

Betrachten wir die kleine Halbachse der Ellipse:

$$r_2 = \frac{d}{2}\sqrt{\left(\frac{c + f\cdot k}{f\cdot k}\right)^2 - 1}$$

Sie verkürzt sich mit wachsendem Transportvolumen und mit wachsenden Betriebskosten (pro Kilometer und Tonne) sowie bei fallenden Baukosten. Die dadurch bedingte Abflachung der Ellipse bedeutet, daß der Trasse nur relativ geringe Abweichungen von der geraden Linie $\overline{P_1P_2}$ gestattet sind, ein Resultat, das genau den intuitiven Erwartungen entspricht.

54. Neukonstruktionen bei gleichzeitiger Vergrößerung der Kapazitäten

Um das konstruierte Modell der Realität einen Schritt näher zu bringen, soll jetzt untersucht werden, wie sich eventuell notwendige Kapazitätserweiterungen bei Netzgliedern auf die Berechnung der optimalen Trasse auswirken. —

Beginnen wir wieder mit der einfachsten Situation, wie sie in Abschnitt 51 beschrieben wurde. Wir wollen annehmen, daß der auf dem Wege g notwendige Kapazitätsausbau einschließlich der damit eventuell verbundenen zusätzlichen Instandhaltungskosten pro Wegeinheit, Verkehrsvolumeneinheit und Jahr Aufwendungen vom Betrage c' erforderlich macht. Zu den bereits früher [siehe Gleichung (5–1)] berechneten Kosten C kommen also weitere Ausgaben C' hinzu:

$$C' = c' \cdot f \cdot x \tag{5–42}$$

Die neuen Gesamtkosten betragen folglich:

$$C + C' = (c + f \cdot k) \sqrt{(x_1 - x)^2 + y_1^2} + (f \cdot k + f \cdot c')\, x \tag{5–43}$$

Überträgt man die Überlegungen von Abschnitt 51 auf die neue Kostenfunktion, so läßt sich aus (5–43) unmittelbar ablesen, daß der optimale Winkel, unter welchem die Verbindungsstrecke t in den Weg g einmündet, durch

$$v = \arccos\left(f \cdot \frac{k + c'}{c + f \cdot k}\right) \tag{5–44}$$

bestimmt ist. Wie zu erwarten, rückt Q näher an P heran. Figur 5.2 zeigt als Beispiel die neue Linienführung (Signatur: kurz geriss. Linie) unter der Annahme, daß die Kapazitätserweiterung pro Tonne, Kilometer und Jahr Kosten in Höhe von DM 0,09 verursacht.

Etwas schwieriger gestaltet sich die Lösung des allgemeinen Falles, wie er in Abschnitt 53 beschrieben wurde. Man muß von der Voraussetzung ausgehen, daß die verschiedenen Netzglieder s_i, soweit sie von der Planung des Streckenzuges von P_1 nach P_2 erfaßt werden, in verschieden hohem Maße ausgebaut werden müssen. Sei c_i der Unkostenbetrag der für das Netzglied s_i erforderlichen Kapazitätserweiterung einschließlich der dadurch zusätzlich entstehenden Instandhaltungskosten pro Jahr, Tonne und Kilometer. Dann betragen die Gesamtkosten $\overline{C}$:

$$\overline{C} = (c + f \cdot k) \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(x_{i2} - x_{i+1,1})^2 + (a_i x_{i2} - a_{i+1}\, x_{i+1,1} + b_i - b_{i+1})^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} f(k + c_i) \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 (1 + a_i^2)} \qquad (5\text{–}45)$$

Die notwendige Bedingung für eine optimale Lösung führt dann zu der Forderung, daß die Winkel w, die die beiden Verbindungsstrecken t_{i-1} und t_i mit dem Netzglied s_i bilden, der Gleichung

$$w = \arccos\left(f \cdot \frac{c_i + k}{c + f \cdot k}\right) \qquad (5\text{–}46)$$

genügen.

(Die mathematische Ableitung der Gleichung (5–46) verläuft parallel der bereits in Abschnitt 532 für $c_i = 0$ vorgeführten Rechnung.)

Zwar läßt sich diese Forderung ohne Schwierigkeiten in die in Abschnitt 532 entwickelte Konstruktion des optimalen Streckenzuges einbauen, jedoch gilt das in Abschnitt 534 angegebene Abschätzungsgebiet nicht mehr.

Bei einer Kapazitätserweiterung, die für kein Netzglied den Betrag c' unterschreitet [man wähle etwa $c' = \text{Min. von } (c_i \,/\, i = 1, \ldots n)$], läßt sich die Gleichung einer Abschätzungsellipse wie folgt berechnen:

Kosten der Direktverbindung $\overline{P_1 P_2}$:

$$d(c + f \cdot k) \qquad (5\text{–}47)$$

Kosten für einen Punkt Q mit P_1 und P_2 verbindenden geradlinigen Weg, der ganz auf dem Netz verläuft:

$$f(k + c')\,(\overline{P_1 Q} + \overline{Q P_2}) \qquad (5\text{–}48)$$

Die Menge aller Punkte Q, deren Wege $\overline{P_1 Q P_2}$ die gleichen Kosten verursachen wie die Direktverbindung $\overline{P_1 P_2}$, wird charakterisiert durch die Beziehung

$$d \cdot (c + f \cdot k) = f\,(k + c')\,(P_1 Q + Q P_2)$$

oder

$$(Q P_1 + Q P_2) = \frac{d(c + f \cdot k)}{f(k + c')} \qquad (5\text{–}49)$$

Die Punkte Q bilden also wieder eine Ellipse, die durch die Brennpunkte P_1 und P_2 sowie die Halbachsen

$$\bar{r}_1 = \frac{1}{2} \frac{d(c + f \cdot k)}{f(c' + k)} \qquad \bar{r}_2 = \sqrt{\left(\frac{d\,(c + f \cdot k)}{2 f\,(c' + k)}\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} \qquad (5\text{–}50)$$

definiert wird. Ihre Gleichung in Normalform:

$$\frac{x^2}{\frac{d^2}{4}\left(\frac{(c+f\cdot k)^2}{f^2(k+c')^2}\right)} + \frac{y^2}{\frac{d^2}{4}\left[\left(\frac{c+f\cdot k}{f(k+c')}\right)^2 - 1\right]} = 1\,. \qquad (5\text{–}51)$$

Siehe Figur 5.9 mit Erläuterung.

Die Position des neuen Parameters c' in der Gleichung (5–51) bedeutet, daß sich die Ellipse gegenüber der in Abschnitt 534 berechneten abgeflacht hat, nur für den Fall $c' = 0$ sind sie identisch. Insbesondere ergibt sich daraus, daß für jeden Wert c_i eine Abschätzungsellipse existiert, wobei die durch c_j definierte Ellipse die dem Wert c_k entsprechende genau dann umschließt, wenn gilt: $c_j < c_k$.

In einem praktischen Fall wird man deshalb so viele Abschätzungsellipsen zu berücksichtigen haben wie es verschiedene Größenordnungen für den eventuell vorgesehenen Kapazitätsausbau gibt.

Erläuterung zu Figur 5.9 (zwei Beispiele):

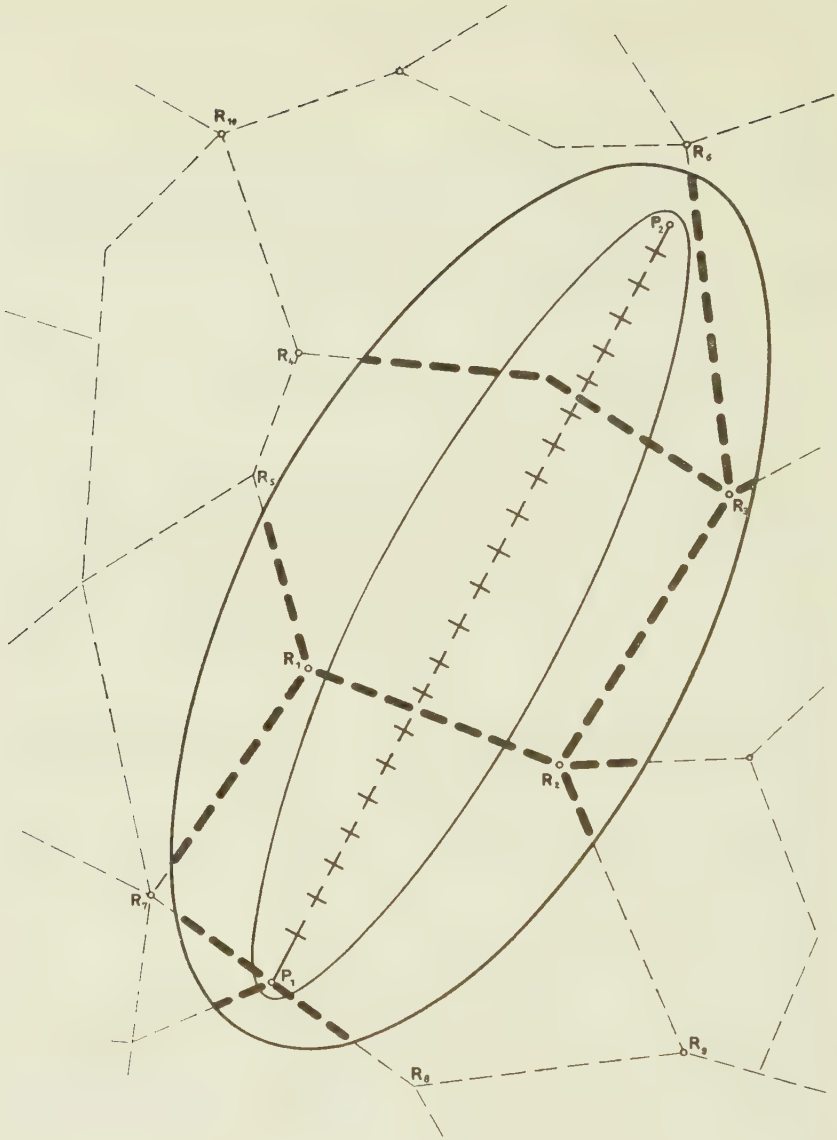
In dem zu lösenden Verkehrsproblem sind die beiden Verkehrsquellen P_1 und P_2 durch einen Weg zu verbinden. Das zu befördernde Verkehrsvolumen f umfaßt 2 400 000 Tonnen pro Jahr bei einem Aufwand von DM 0,19 pro Tonne und Kilometer. Die Instandhaltungskosten und der Kapitaldienst für den Wegebau betragen zusammen 60 000 DM pro Kilometer. Die Luftlinienentfernung zwischen P_1 und P_2, d. h. die Strecke $\overline{P_1P_2}$ ist 170 Kilometer lang.

Figur 5.9 zeigt das vorgegebene Netz. Die äußere der beiden Ellipsen begrenzt das Areal, das für die gesuchte Trasse in Frage kommt. Auf Grund ihres Verlaufes scheiden beispielsweise zwei Vorschläge mit geringem Baukostenaufwand, nämlich die Wege P_1-R_7-R_{10}-R_6 und P_1-R_8-R_9-R_2-R_3 mit einem Anschlußstück von der Strecke $\overline{R_6R_3}$ zum Punkt P_2 von vornherein aus der Betrachtung aus — immer vorausgesetzt, daß das Ziel die ökonomisch optimale Trasse ist.

Innerhalb der Ellipse gibt es drei Alternativen:

Neubau einer Strecke von P_1 nach R_2 und eines Anschlußstückes von $\overline{R_3R_6}$ nach P_2, dann der Bau eines Weges, der Teile der bestehenden Netzglieder $\overline{P_1R_7}$, $\overline{R_7R_1}$, $\overline{R_1R_5}$ und eventuell auch $\overline{R_4R_3}$ in die Trasse einbezieht, und schließlich die geradlinige Verbindung von P_1 nach P_2, bei der sich eine Einbeziehung der Netzglieder $\overline{R_1R_2}$ und $\overline{R_2R_4}$ nicht lohnt, weil diese nahezu senkrecht zur Strecke $\overline{P_1P_2}$ verlaufen.

Dem optischen Eindruck zufolge wird man annehmen dürfen, daß die zweite Alternative der ersten unterlegen ist, so daß insgesamt nur die Kosten



Figur 5.9

für zwei verschiedene Trassen zu kalkulieren sind. Der Kostenvergleich entscheidet dann über die beste Lösung.

Nimmt man an, daß bei einer eventuellen Einbeziehung von Netzgliedern in die Planung der Trasse ihre Kapazitäten ausgebaut werden müssen, so daß auf ihnen für jede transportierte Tonne eine zusätzliche Belastung in Höhe von DM 0,02 pro Kilometer entsteht, so umschließt die innere Ellipse das Areal, in welchem die wirtschaftlich optimale Trasse liegt. Da die drei innerhalb der Ellipse liegenden Teile von bereits bestehenden Netzgliedern zu der Verbindungslinie von P_1 nach P_2 fast senkrecht verlaufen, können sie sich für die Trassierung des geplanten Weges nicht eignen.

Daraus folgt: Die optimale Lösung des Verkehrsproblems ist der Neubau einer gradlinigen Verbindungsstrecke von P_1 nach P_2. —

6. LINIENFÜHRUNG IN DER GEOGRAPHISCHEN EBENE

61. Vorbemerkungen

Zur Einführung in das Thema zwei Zitate:

Ratzel (1912, II. Bd., S. 347): „Schwer wegsame Strecken durchschreitet der Verkehr möglichst geradlinig in Richtung auf die Gebiete, die leichter zu durchschreiten sind." Hettner (1952, S. 32): „Die Wege in der Ebene richten sich hauptsächlich nach der Beschaffenheit des Bodens, umgehen nach Möglichkeit Sümpfe, Moräste oder Dünen."

Hinweise wie diese sind in der verkehrsgeographischen Literatur zahlreich anzutreffen. Als Beobachtungen im Bereich der „reinen Verkehrsgeographie" (Hettner 1897, S. 625) entbehren sie jedoch jedes Hinweises, wie im Falle eines geplanten Verkehrsweges die wirtschaftlich günstigste Trasse zu finden ist[33]. Genau das ist der Gegenstand des vorliegenden Kapitels.

Insofern sich das Thema nur auf die Linienführung eines Verkehrsweges und nicht auf ein System von solchen bezieht, leistet es für die Theorie der Verkehrsnetze nur „Zubringerdienste", werden jedoch seine Ergebnisse mit denen der Kapitel 4 und 5 kombiniert, so wird damit die erstrebte Synthese von geographischen Kräften einerseits und geometrisch-algebraischen Bedingungen andererseits auf analytischer Basis erreicht. —

62. Problemstellung

Um den faktischen geographischen Gegebenheiten in höherem Maße gerecht zu werden, oder, anders gesehen, um den räumlichen Anwendungsbereich der theoretischen Überlegungen zu vergrößern, soll jetzt auf die Annahme der Homogenität der Ebene verzichtet werden, nur die Voraussetzung der Idealität der Ebene im Sinne eines zweidimensionalen Raumes bleibt aufrechterhalten. Das bedeutet, daß es nun keinen einheitlichen Wert

[33] Eine wesentliche Ausnahme bilden die Ausführungen von Lösch (1944, S. 129f) und v. Stackelberg (1938) zum Brechungsgesetz des Verkehrs im Zusammenhang mit der Gestalt von Transportlinien. —

zur Erfassung der Baukosten pro Weglängeneinheit mehr gibt. Immerhin wird es möglich sein, ein derartiges Gebiet zu untergliedern in Areale ungefähr gleicher Baukosten pro Weglängeneinheit; die sie begrenzenden Kurven wollen wir als Grenzlinien gleicher Baukosten bezeichnen.

Es ist klar, daß ein Verkehrsweg, der zwei Verkehrsquellen miteinander verbinden soll und dabei ein solches Areal gleicher Baukosten durchmißt, in demselben geradlinig verläuft. Ebenso klar ist aber, daß dieser Weg, falls er mehrere Areale mit unterschiedlichen Baukosten pro Weglängeneinheit durchquert, die beiden Punkte nicht geradlinig verbindet, sofern er nach ökonomischen Gesichtspunkten trassiert wurde. Vielmehr wird der Weg Areale mit relativ hohen Baukosten entweder an Stellen kleinster „Breite" überqueren, oder er wird versuchen, sie gänzlich zu vermeiden. Anders formuliert: Der Weg wird möglichst weitgehend Areale relativ niedriger Baukosten benutzen. Diese Anpassung an das Gelände in Form von Umwegen stößt allerdings auf zwei Gegenkräfte, die bei wirtschaftlich optimaler Trassierung gleichermaßen in Rechnung gestellt werden müssen. Wachsende Umwege bedeuten wachsende Weglänge und damit steigende Betriebskosten und eventuell auch steigende Baukosten.

Wieder gilt es, die verschiedenen gegensätzlichen Kräfte in einem mathematischen Ausdruck kostenmäßig zu erfassen und die Kostenfunktion hinsichtlich ihrer Minima zu untersuchen. Da der Weg innerhalb eines Areals geradlinig verläuft, sind nur Ein- und Austrittsstelle maßgebend. Die Gestalt des Weges ist deshalb ein Polygonzug zwischen den beiden Verkehrsquellen, dessen Eckpunkte auf den Grenzlinien gleicher Baukosten liegen. Durch die Lage dieser Punkte ist der Weg eindeutig bestimmt. Folglich muß eine mathematische Behandlung des Problems darauf abzielen, die Koordinaten jener Punkte auf den Grenzlinien zu bestimmen, für die der durch sie definierte Polygonzug die Kostenfunktion minimiert. —

63. Definitionen, Entwicklung der Kostenfunktion

Die bisherigen Überlegungen zusammenfassend nehmen wir an, daß ein Weg von P_1 nach P_2 n Grenzlinien gleicher Baukosten überquert. Sein Bild ist ein Polygonzug mit n Eckpunkten auf den Grenzlinien und zwei fest gegebenen Endpunkten, nämlich P_1 und P_2. In einem cartesischen Koordinatensystem werden die n Eckpunkte durch $2n$ Koordinaten fixiert. Mithin sind die Gesamtkosten eine Funktion in $2n$ Veränderlichen. In die Kostenrechnung gehen weiter ein die $n + 1$ Werte der Baukosten pro Längenein-

heit in den einzelnen Arealen, außerdem das Verkehrsvolumen und die Betriebskosten pro Verkehrseinheit und Weglängeneinheit. Um das Problem mathematisch in den Griff zu bekommen, definieren wir:

φ_i $(i = 1, 2, \ldots)$: Grenzlinien gleicher Baukosten pro Längeneinheit.

$M = \{\varphi_i \,/\, i = 1, 2, \ldots\}$ die Menge aller Grenzkurven gleicher Baukosten pro Längeneinheit im Untersuchungsgebiet.

$P_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, $P_2(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ zwei im Untersuchungsgebiet gelegene Verkehrsquellen, die durch einen Weg verbunden werden sollen.

f bezeichne die Verkehrsspannung beziehungsweise das Verkehrsvolumen zwischen P_1 und P_2.

$P_i(x_i, y_i)$ sei der allgemeine Punkt der Grenzlinie φ_i.

$\bar{c}_i$ sei der Betrag der Baukosten pro Weglängeneinheit in dem zwischen φ_{i-1} und φ_i gelegenen Areal.

F_i sei das zwischen den Grenzlinien φ_{i-1} und φ_i liegende Areal.

d_i bezeichne sowohl die Wegstrecke durch das Areal F_i als auch die Länge derselben.

k sei der Betrag der Kosten für den Verkehrsbetrieb pro Verkehrseinheit und Weglängeneinheit.

Mit Hilfe dieser Definitionen ist es nun einfach, die Kostenfunktion aufzustellen: Die Kosten C sind gleich der Summe der Kosten C_i in den einzelnen vom Wege durchlaufenen Arealen F_i. Diese setzen sich zusammen aus den Baukosten pro Weglängeneinheit $\bar{c}_i$ mal der Länge d_i des zu bauenden Weges sowie den Betriebskosten pro Verkehrseinheit und Längeneinheit, k, mal der Weglänge d_i mal dem zu bewältigenden Verkehrsvolumen f:

$$\begin{aligned} C = \sum_i C_i &= \sum_i (\bar{c}_i \cdot d_i + k \cdot f \cdot d_i) \\ &= \sum_i (\bar{c}_i + f \cdot k) d_i \end{aligned} \tag{6-1}$$

Für die Kombination von gegebenen Parametern führen wir eine neue Konstante ein:

$$(\bar{c}_i + f \cdot k) = c_i \quad (i = 1, 2 \ldots) \tag{6-2}$$

c_i bezeichnet die Gesamtkosten pro Längeneinheit im Areal F_i. Substituiert man (6-2) in (6-1) und ersetzt die Längen d_i durch die Abstände ihrer Endpunkte im Koordinatennetz, so lautet die Kostenfunktion:

$$C = \sum c_i \sqrt{(x_{i-1} - x_i)^2 + (y_{i-1} - y_i)^2} \tag{6-3}$$

Dieser Ausdruck für die zu erwartenden Gesamtkosten ist rein formal zu verstehen, für unser Problem leistet er noch nichts, weil das eigentlich relevante geographische Merkmal, nämlich der Verlauf der Grenzlinien gleicher Baukosten im Untersuchungsgebiet, von ihm noch nicht erfaßt wird. Obwohl vorausgesetzt werden soll, daß eine Karte mit den Positionen der beiden Verkehrsquellen P_1 und P_2 und dem Verlauf der Grenzlinien q_i vorliegt, bleibt immer noch die Schwierigkeit zu überwinden, die kartierten Informationen in algebraische Form zu bringen. Es gibt in der Praktischen Mathematik eine Reihe von Methoden, die es erlauben, eine gegebene Kurve in der Euklidischen Ebene durch einen algebraischen Ausdruck zu approximieren, und zwar mit beliebiger Genauigkeit. Wie sich aber bei den Vorbereitungen zu diesem Kapitel herausstellte, sind sie für unsere numerischen Kalkulationen schwer verwendbar, weil sie den Prozeß analytischer Berechnung von optimalen Lösungen schwierig gestalten. Das sei an einem Beispiel demonstriert:

Setzt man voraus, daß zwischen P_1 und P_2 nur eine einzige Grenzlinie verläuft, und approximiert diese durch ein Polynom zweiten Grades (was im allgemeinen eine außerordentlich grobe Annäherung ist), so führt die einmal differenzierte Kostenfunktion zu einem Polynom des Grades 10, während bekanntlich Polynome von höherem als 4. Grad durch Radikale nicht mehr lösbar sind.

Es wurde deshalb ein anderer Weg gewählt, die gegebenen Grenzlinien mathematisch darzustellen, und zwar durch Approximation mit Polygonzügen. Wie sich zeigen wird, wächst mit steigender Genauigkeit dieser

Figur 6.1

Approximation der erforderliche Rechenaufwand erheblich; umgekehrt vergrößert sehr simple Approximation die Fehlerquelle im Endergebnis. Figur 6.1 zeigt Grenzlinien mit den zugehörigen Polygonzügen.

64. Zerlegung des allgemeinen Problems

Um den neuen Gedankengang mathematisch verarbeiten zu können, sind weitere Definitionen erforderlich:

Φ_i sei der Polygonzug, durch welchen die Grenzlinie φ_i approximiert wird.

s_{ij} bezeichne das j-te Glied des Polygonzugs Φ_i.

G_i sei die Menge aller Glieder des Polygonzuges Φ_i, es ist dann
$G_i = \{s_{ij} \,/\, j = 1, 2 \ldots\}$, $\{\Phi_i\} = \{s_{i1}\} + \{s_{i2}\} + \{s_{i3}\} + \cdots$

g_{ij} sei die durch s_{ij} definierte Gerade:

$$y_{ij} = a_{ij}x_{ij} + b_{ij}$$

R_{ij0}, R_{ij1} seien die Endpunkte von s_{ij} auf g_{ij}:

$$s_{ij} = \overline{R_{ij0}R_{ij1}}$$

Diese Endpunkte seien so angeordnet, daß $R_{i,j+1,0} = R_{ij1}$ gilt.

Q_{ij} (x_{ij}, y_{ij}) sei allgemeiner Punkt der Geraden g_{ij}.

Die nun folgenden Untersuchungen gehen von einer einschneidenden Einschränkung aus: Wir wählen irgendwie eine bestimmte Menge von Grenzkurven aus und weiter aus den zugehörigen Polygonzügen mindestens ein Glied. Genau für die derart ausgewählten Glieder, deren geordnete Menge mit W bezeichnet werde, soll jetzt der optimale Streckenzug von P_1 nach P_2 berechnet werden. Die dahinterstehende Idee ist, das zunächst komplizierte Verkehrsproblem zu zerlegen, so daß die Aufgabe sich reduziert auf die Lösung einer Anzahl von einfachen Teilproblemen. Der optimale Streckenzug ist durch seine Eckpunkte eindeutig definiert. Die Eckpunkte wieder liegen auf bestimmten Gliedern bestimmter Polygonzüge. Indem man die relativ optimalen Streckenzüge für alle möglichen Kombinationen[34] von Polygonzuggliedern berechnet, muß sich der absolut optimale Weg durch Kostenvergleich aller Einzellösungen erzielen lassen. Wir wollen hier die Möglichkeit mehrerer verschiedener Streckenzüge zwischen P_1 und P_2 mit gleichen

[34] Unter möglichen Kombinationen sollen alle jene verstanden werden, deren zugehöriger optimaler Streckenzug nach P_1 nach P_2 nur die Poligonzugglieder dieser Kombination überschreitet.

minimalen Gesamtkosten unberücksichtigt lassen, weil die Wahrscheinlichkeit, daß eine solche Situation in der Praxis eintritt, gleich Null ist. Das Thema der folgenden Ausführungen ist die Konstruktion des optimalen Streckenzuges, dessen Eckpunkte auf den Polygonzuggliedern der Menge W liegen.

641. Extremwertuntersuchung für das simplifizierte Problem

Für die nunmehr stark vereinfachte Situation definieren wir: Es sei $S = \{s_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\}$ die geordnete Menge aller Polygonzugglieder, für die der optimale Streckenzug berechnet werden soll (d. h. $S = W$),

$R_{k0}\,(x_{k0},\, y_{k0})$ und $R_{k1}\,(x_{k1},\, y_{k1})$ seien die Endpunkte des Gliedes s_k,

$g_k = a_k x_k + b_k$ die durch s_k definierte Gerade,

$Q_k\,(x_k,\, y_k)$ der allgemeine Punkt der Geraden g_k .

Für den simplifizierten Fall berechnen sich die Gesamtkosten zu:

$$C = \sum_{i=1}^{n+1} c_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \tag{6-4}$$

oder $$C = \sum_{i=1}^{n+1} c_k \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (a_k x_k + b_k - a_{k-1} x_{k-1} - b_{k-1})^2}\ . \tag{6-5}$$

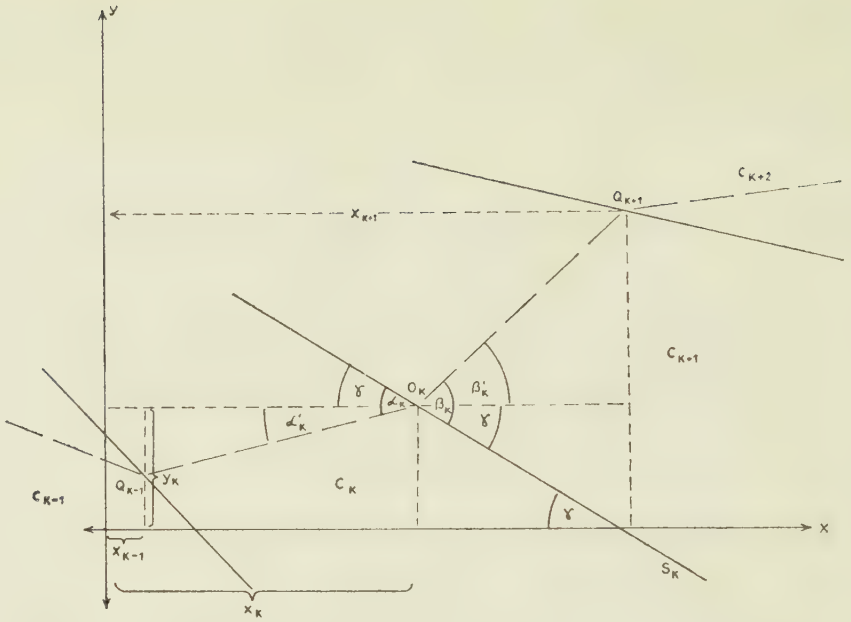
Notwendige Bedingungen für ein (relatives) Minimum der Funktion C ist, daß für alle k $(k = 1, \ldots, n)$ gilt:

$$\frac{\partial c}{\partial x_k} = 0, \quad \text{d. h.}$$

$$c_k \cdot \frac{(x_k - x_{k-1}) + a_k(a_k x_k + b_k - a_{k-1} x_{k-1} - b_{k-1})}{\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (a_k x_k + b_k - a_{k-1} x_{k-1} - b_{k-1})^2}}$$

$$+ c_{k+1} \frac{-(x_{k+1} - x_k) - a_k(a_{k+1} x_{k+1} + b_{k+1} - a_k x_k - b_k)}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (a_{k+1} x_{k+1} + b_{k+1} - a_k x_k - b_k)^2}} = 0 \tag{6-6}$$

Eine algebraische Umformung der Gleichungen ergäbe ein System von n Polynomen vierten Grades in jeweils drei Veränderlichen. Ein solches Gleichungssystem besitzt 4^n n-tupel als Lösungen. Dieser Tatbestand ist nur von theoretischem Interesse, in der Praxis würde für größeres n sehr schnell ein umständlicher und aufwendiger Rechenprozeß notwendig werden. Das Gleichungssystem (6-6) soll deshalb wieder geometrisch interpretiert werden.



Figur 6.2

Unter Verwendung der in Figur 6.2 dargestellten Symbolik lautet die trigonometrische Formulierung des Gleichungssystems (6–6):

$$c_k(\cos\alpha'_k + a_k \sin\alpha'_k) = c_{k+1}(\cos\beta'_k + a_k \sin\beta'_k) \tag{6–7}$$

oder, da a_k der Tangens des Steigungswinkels der Geraden g_k ist:

$$a_k = \operatorname{tg}(180 - \gamma_k) = -\operatorname{tg}\gamma_k = -\frac{\sin\gamma_k}{\cos\gamma_k}$$

$$c_k\left(\cos\alpha'_k - \frac{\sin\gamma_k}{\cos\gamma_k}\sin\alpha'_k\right) = c_{k+1}\left(\cos\beta'_k - \frac{\sin\gamma_k}{\cos\gamma_k}\cdot\sin\beta'_k\right)$$

$$c_k(\cos\alpha'_k\cos\gamma_k - \sin\alpha'_k\sin\gamma_k) = c_{k+1}(\cos\beta'_k\cos\gamma_k - \sin\beta'_k\sin\gamma_k)$$

$$\frac{\cos(\alpha'_k + \gamma_k)}{\cos(\beta'_k + \gamma_k)} = \frac{\cos\alpha_k}{\cos\beta_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k}\,. \tag{6–8}$$

In Worten: Der P_1 mit P_2 verbindende Streckenzug überschreitet die Grenzkurve φ_k, die hier durch die Gerade g_k repräsentiert wird, im Punkte

Q_k. Soll der Weg den notwendigen Bedingungen für Optimalität wirtschaftlicher Trassierung genügen, so müssen sich die Kosinus der Ein- und Austrittswinkel α_k und β_k, die der Streckenzug in Q_k mit der Geraden g_k bildet, umgekehrt proportional wie die entsprechenden Kostenindices der beiden durch g_k getrennten Areale F_k und F_{k+1} verhalten. —

Es ist jetzt an der Zeit, diejenigen Einschränkungen innerhalb der Gesamtheit der Voraussetzungen zu berücksichtigen, die besagen, daß der Punkt Q_k, in welchem der Streckenzug von P_1 nach P_2 die Gerade g_k überschreitet, als Definitionsbereich die Strecke s_k hat, wobei nach Konstruktion s_k das abgeschlossene Intervall $\overline{R_{k0} R_{k1}}$ auf der Geraden g_k ist. Die dadurch auftretenden Schwierigkeiten seien jetzt an Hand einer praktischen Konstruktion des gesuchten Streckenzuges erörtert.

642. Approximation der notwendigen Minimalbedingungen

Auf Grund der bisher erzielten Resultate soll das Problem noch einmal neu formuliert werden. Gegeben seien die beiden Punkte P_1 und P_2, weiter eine geordnete Menge S von Strecken s_k, $k = 1, \ldots, n$, und für jede Strecke s_k ein konstanter Wert $c_{k-1}\, c_k$, der gleich der Proportion der Kostenindices der beiden durch s_k getrennten Areale F_k und F_{k+1} ist. Gesucht ist ein Streckenzug von P_1 nach P_2, dessen n Eckpunkte Q_k, $k = 1, \ldots, n$, auf den Strecken s_k liegen, und zwar so, daß Q_j auf s_j liegt. Der Streckenzug muß außerdem der Bedingung genügen, daß für alle k die in Q_k mit s_k gebildeten Winkelpaare α_k, β_k die Gleichung

$$\left| \frac{\cos \alpha_k}{\cos \beta_k} - \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \text{Min} \tag{6–9}$$

erfüllen. Wir wählen irgendeinen Streckenzug zwischen P_1 und P_2, der den genannten Bedingungen mit Ausnahme der Forderung (6–9) genügt, beispielsweise den Polygonzug Ω', der P_1 und P_2 über die Mittelpunkte Q'_k aller Strecken s_k in der Reihenfolge ihrer Indices verbindet:

$$\Omega' = \{P_1, Q'_1, Q'_2, \ldots Q'_k, \ldots P_2\}\,. \tag{6–10}$$

Wir konstruieren nun einen neuen Polygonzug, der aus Ω' wie folgt gebildet werden soll:

Q'_1 werde auf s_1 so bewegt, daß sich die Differenz

$$\left| \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta'_1} - \frac{c_2}{c_1} \right| \tag{6–11}$$

verringert. Nur dann soll Q_1' seine Position beibehalten, wenn diese Differenz schon Null ist. Die Verschiebung soll so lange in gleicher Richtung fortgesetzt werden, bis entweder der Ausdruck (6–11) den Wert Null annimmt oder Q_1' einen Endpunkt von s_1 erreicht: $Q_1' = R_{10}$ oder $Q_1' = R_{11}$. Wir bezeichnen die neue Position von Q_1' mit Q_1^2. Die gleiche Prozedur nehmen wir mit Q_2' auf s_2 bezüglich der Differenz

$$\left| \frac{\cos \alpha_2'}{\cos \beta_2'} - \frac{c_3}{c_2} \right|$$

vor, und ebenso verfahren wir der Reihe nach mit allen anderen Punkten Q_k'. Die Punkte Q_k^2 definieren einen neuen Polygonzug

$$\Omega^2 = \{P_1, Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, \ldots P_2\}, \tag{6–12}$$

aus welchem sich in gleicher Weise ein neuer Polygonzug

$$\Omega^3 = \{P_1, Q_1^3, Q_2^3, \ldots P_2\} \tag{6–13}$$

konstruieren läßt, und so fort. Durch fortgesetzte Anwendung des beschriebenen Bildungsprinzips erhält man eine Folge von Polygonzügen

$$\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3, \Omega^4, \ldots . \tag{6–14}$$

Die hier vorgetragene Konstruktion einer Folge von Polygonzügen soll nur beispielhaften Charakter haben. Wir wollen in Zukunft alle Folgen berücksichtigen, die dadurch entstehen, daß man die Eckpunkte Q_k eines vorgegebenen Polygonzuges fortgesetzt so auf den entsprechenden Strecken s_k verschiebt, daß das geforderte Verhältnis der Winkel in Q_k jedesmal so weitgehend wie möglich approximiert wird.

643. Zerlegung des simplifizierten Problems

Wir zeigen nun:

Senkung der Gesamtkosten durch räumliche Verlagerung eines projektierten Streckenzuges und Approximation der geforderten Winkelverhältnisse sind äquivalente Operationen.

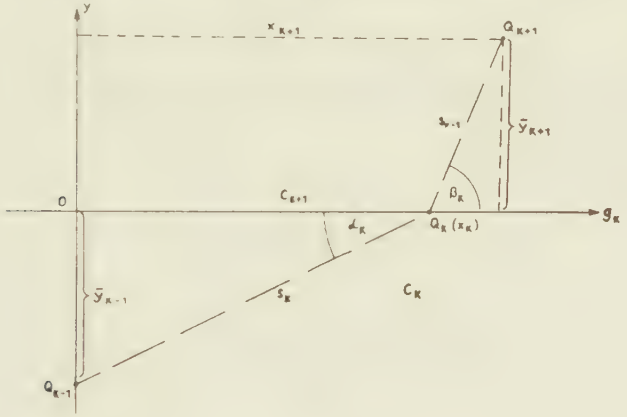
Um diese Behauptung zu beweisen, lösen wir jede Variation des Streckenzuges von P_1 nach P_2 in die Einzelbewegungen seiner Eckpunkte auf und betrachten eine jede solche Verschiebung gesondert. Das läßt sich erreichen, indem man in einem vorgegebenen Streckenzug

$$\Omega = \{P_1, Q_1, Q_2, \ldots Q_n, P_2\} \tag{6–15}$$

alle Punkte $Q_j = (\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ mit $j \neq k$ festhält und nur den Punkt $Q_k = (x_k, y_k)$ auf s_k bewegt. Dann sind die durch (6–4) gegebenen Verkehrskosten eine Funktion einzig des Punktes Q_k beziehungsweise der Variablen x_k, insofern nämlich die Ordinate $y_k = a_k x_k + b_k$ mit x_k eindeutig bestimmt ist. Mit anderen Worten: Die Frage, wie die Verkehrskosten durch Bewegung des Eckpunktes Q_k geändert werden, reduziert sich auf die Frage, wie sich die Kostenfunktion C' für den zwischen Q_{k-1} und Q_{k+1} gelegenen Streckenzug gestaltet, wenn $Q_k(x_k)$ variabel ist. Um das zu beantworten, werde das Koordinatennetz so gelegt, daß s_k auf der x-Achse liegt und R_{k0} mit dem Ursprung zusammenfällt. Dann gilt:

$$\bar{x}_{k-1} = y_k = 0 \qquad \bar{y}_{k-1} \neq 0 \qquad \bar{y}_{k+1} \neq 0 \tag{6–16}$$

Bezüglich der beiden Ungleichungen in (6–16) sei daran erinnert, daß s_k Glied eines Polygonzuges ist, der die Grenzlinie φ_k approximiert. Da für die Approximation keine Vorschrift besteht, läßt sich die Situation $\bar{y}_{k+1} = \bar{y}_{k-1} = 0$ immer vermeiden.



Figur 6.3

Figur 6.3 zeigt als Teilabschnitt des Streckenzuges von P_1 nach P_2 die beiden Glieder $\overline{Q_{k-1}Q_k}$ und $\overline{Q_kQ_{k+1}}$. Ist Q_k variabel, so betragen die Kosten für diesen Teilabschnitt:

$$C'(x_k) = c_k \sqrt{x_k + \bar{y}_{k-1}^2} + c_{k+1} \sqrt{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2} \tag{6–17}$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum ist dann

$$\frac{\mathrm{d}\,C'}{\mathrm{d}\,x_k} = 0 \tag{6–18}$$

oder

$$c_k \frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + \bar{y}_{k-1}^2}} - c_{k+1} \frac{(\bar{x}_{k+1} - x_k)}{\sqrt{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2}} = 0 \qquad (6\text{–}19)$$

(6–19) entspricht dem schon in (6–6) erzielten Ergebnis. Die beiden Wurzeln messen die Strecken $\overline{Q_{k-1}Q_k}$ und $\overline{Q_kQ_{k+1}}$ und müssen als solche positiv gezogen werden. Das aber bedeutet, daß eine Lösung von (6–18) dem Intervall

$$0 \leq x_k \leq \bar{x}_{k+1} \qquad (6\text{–}20)$$

angehören muß. Daraus folgt insbesondere, daß Ein- und Austrittswinkel jeweils höchstens 90° betragen können. (Siehe dazu auch Figur 6.3.)

Läßt man x_k von 0 bis $\bar{x}_{k+1}$ wachsen, so wächst der Ausdruck

$\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2 + \bar{y}_{k-1}^2}}$ monoton von 0 bis $\frac{\bar{x}_{k+1}}{\sqrt{\bar{x}_{k+1}^2 + \bar{y}_{k-1}^2}}$, gleichzeitig fällt der Ausdruck

$\frac{(\bar{x}_{k+1} - x_k)}{\sqrt{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2}}$ monoton von $\frac{\bar{x}_{k+1}}{\sqrt{\bar{x}_{k+1}^2 + \bar{y}_{k+1}^2}}$ bis 0, folglich gibt es einen

und nur einen Punkt, in welchem die notwendige Bedingung (6–18) erfüllt ist. Daß in diesem Extrempunkt der Kostenfunktion ein Minimum — und wegen der Einzigkeit des Lösungspunktes das einzige Minimum — vorliegt, zeigt die zweite Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}^2C'}{\mathrm{d}x_k^2} = c_k \frac{\sqrt{x_k^2 + \bar{y}_{k-1}^2} - \frac{x_k^2}{\sqrt{x_k^2 + \bar{y}_{k-1}^2}}}{(\sqrt{x_k^2 + \bar{y}_{k-1}^2})^2} -$$

$$- c_{k+1} \frac{\sqrt{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2} + \frac{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2}}}{(\sqrt{(\bar{x}_{k+1} - x_k)^2 + \bar{y}_{k+1}^2})^2} = c_k \frac{\bar{y}_{k-1}^2}{(x_k^2 + \bar{y}_{k-1})^{3/2}} +$$

$$+ c_{k+1} \frac{y_{k+1}^2}{[(\bar{x}_{k+1}^2 - x_k) + \bar{y}_{k+1}^2]^{3/2}} > 0 \qquad (6\text{–}21)$$

Damit sind Existenz und Eindeutigkeit des Minimums nachgewiesen, es läßt sich explizit bestimmen als Lösung der Gleichung (6–18); ein graphisches Lösungsverfahren folgt in einem späteren Abschnitt.

Trigonometrisch wird der Lösungspunkt eindeutig bestimmt durch die Gleichung (6–19), indem wir für diese eine entsprechende Schreibweise wählen:

$$\frac{\cos \alpha_k}{\cos \beta_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k} \qquad (6\text{–}22)$$

Da die zweite Ableitung permanent größer Null ist, ist jeder Vorgang der Form

$$\left| \frac{\cos \alpha_k}{\cos \beta_k} - \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \to 0 \tag{6–23}$$

mit dem Fallen der Kostenfunktion gleichwertig, was demonstriert werden sollte. —

644. Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für die Partiallösung

Mit dem Zwischenergebnis soll nun die frühere Überlegung weiter voran getrieben werden. Wie erinnerlich, war dort ein iterativer Prozeß entwickelt worden, der von jedem vorgegebenen Streckenzug zu einer Folge von solchen führte. Einzige Forderung war, daß die damit verbundene Verschiebung von Eckpunkten den beiden Bedingungen

$$\left| \frac{\cos \alpha_k}{\cos \beta_k} - \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| \to 0 \,, \quad x_{k0} \leq x_k \leq x_{k1} \tag{6–24}$$

genügen sollte. In Verbindung mit dem Resultat des vorhergehenden Abschnitts läßt sich zusammenfassend sagen:

Jeder iterative Prozeß der oben beschriebenen Form führt zu einer Folge von Streckenzügen mit monoton sinkenden Verkehrskosten. Umgekehrt läßt sich jede Senkung der Verkehrskosten durch Verlagerung der Eckpunkte des Streckenzuges als ein solcher iterativer Prozeß auffassen.

Wir betrachten nun eine Menge N, die wie folgt definiert sei:

(1) z sei Element von N, wenn z das letzte Glied einer endlichen Folge von Streckenzügen ist, die dem oben konstruierten Bildungsschema gehorcht und deren Glieder nach endlich vielen Schritten invariant bleiben.

(2) z sei Element von N, wenn z Häufungspunkt einer der oben konstruierten Folgen ist. Solche Häufungspunkte muß es nach dem Satz von Weierstraß-Bolzano geben, weil die Folgen unendlich viele Elemente haben, die alle bezüglich ihrer Eckpunkte in dem n-dimensionalen abgeschlossenen Quader $\overline{R_{k0} R_{k1}} \,/\, k = 1, \ldots, n$ liegen.

Die Menge N enthält als Elemente nur solche Polygonzüge von P_1 nach P_2, für deren Eckpunkte auf Grund der Konstruktion notwendig gilt:

$$Q_k = R_{k0} \quad \text{oder} \quad Q_k = R_{k1} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos \alpha_k}{\cos \beta_k} = \frac{c_{k+1}}{c_k} \,. \tag{6–25}$$

Wir beweisen: Die Menge N enthält genau ein Element.

Es ist klar, daß N mindestens ein Element enthält. Daß sie aber auch nicht mehr als ein Element enthält, soll indirekt bewiesen werden. — Angenommen also, N enthielte mindestens zwei verschiedene Elemente, die hier mit Ω^1 und Ω^2 bezeichnet werden sollen. Wegen $\Omega^1 \neq \Omega^2$ können sie nicht alle Eckpunkte gemeinsam haben. Es sei (Q_j^1, Q_j^2) das erste Paar von Eckpunkten mit $Q_j^1 \neq Q_j^2$ und (Q_h^1, Q_h^2) das letzte derartige. Dann ist

$$\begin{aligned} Q_{j-1}^1 &= Q_{j-1}^2 \qquad (j \geq 1) \\ Q_{h+1}^1 &= Q_{h+1}^2 \qquad (h \leq n) \end{aligned} \tag{6–26}$$

Die durch das Koordinatenkreuz aufgespannte Ebene der reellen Zahlenpaare wird durch jede Gerade g_r, $r = 1, \ldots, n$, in zwei Halbebenen zerlegt. Jene Halbebene, welche den Ursprung enthält, werde als die bezüglich g_r linke Halbebene bezeichnet, die andere entsprechend die bezüglich g_r rechte Halbebene. Wir definieren nun:

Das Streckenpaar (s_r^1, s_r^2) heiße konvergierend, falls sich die Verlängerungen von s_r^1 und s_r^2 in der bezüglich g_r rechten Halbebene schneiden, andernfalls divergierend.

Es wird bewiesen:

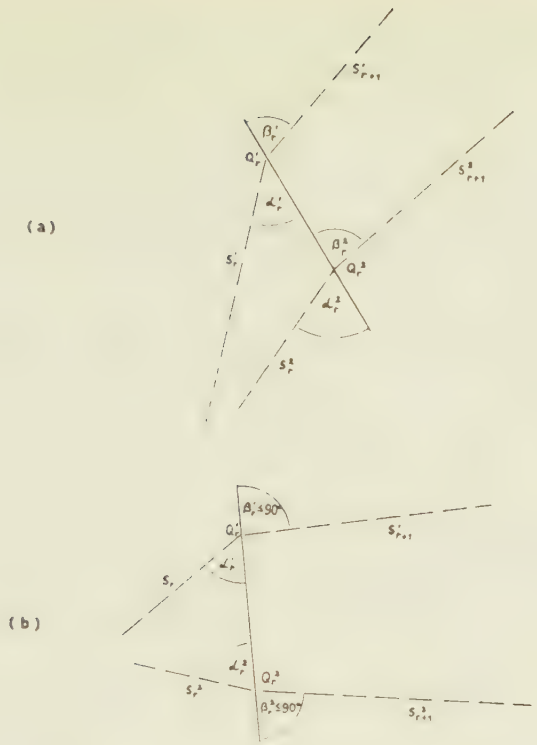
Aus der Divergenz des Streckenpaares s_r^1, s_r^2 folgt die Divergenz des Streckenpaares s_{r+1}^1, s_{r+1}.

Es sind (Figur 6.4) insgesamt vier Möglichkeiten zu unterscheiden:

(A) $Q_r^1 \neq R_{r0}, Q_r^2 \neq R_{r1}$;
(B) $Q_r^1 \neq R_{r0}, Q_r^2 = R_{r1}$;
(C) $Q_r^1 = R_{r0}, Q_r^2 \neq R_{r1}$;
(D) $Q_r^1 = R_{r0}, Q_r^2 = R_{r1}$.

Gemäß der Behauptung gehen wir von der Voraussetzung aus, daß das Streckenpaar s_r^1, s_r^2 divergiert. Jeder der genannten Fälle ist noch danach zu untergliedern, ob die Eintrittswinkel α_r^1, α_r^2, die die Strecken s_r^1 und s_r^2 mit der Geraden g_r bilden, bezüglich des von g_r und den Verlängerungen dieser beiden Strecken geformten Dreiecks beide Innenwinkel sind oder nicht (Figur 6.4). Wie in Abschnitt 643 dargelegt, sind beide Winkel als Eintrittswinkel kleiner oder gleich 90°. Sie können deshalb nicht Außenwinkel des Dreiecks sein. (Der Spezialfall $\alpha_r^1 = \alpha_r^2 = 90°$ ist nur von theoretischem Interesse.) Sind beide Winkel Innenwinkel, so ist der Beweis für die oben aufgestellte Behauptung trivial: Da die Strecken s_r^i, s_{r+1}^i $(i = 1, 2)$ auf entgegengesetzten Seiten der Senkrechten in Q_r^i verlaufen, ist

$$\beta_r^i \leq 90° \quad (i = 1, 2), \tag{6–27}$$



Figur 6.4

was mit der Divergenz des Paares s_{r+1}^1, s_{r+1}^2 gleichbedeutend ist (Figur 6.4b). Wenden wir uns nun der zweiten Variante zu. Aus Symmetriegründen genügt es, sich auf den in Figur 6.4a dargestellten Fall zu beschränken. (Die Alternative wäre die Situation, in welcher α_r^1 Außenwinkel und α_r^2 Innenwinkel des besagten Dreiecks sind.)

Fall A: Es ist

$$\frac{\cos \alpha_r^1}{\cos \beta_r^1} = \frac{c_{r+1}}{c_r} \qquad \frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} = \frac{c_{r+1}}{c_r} \tag{6–28}$$

Wegen der Divergenz von s_r^1 und s_r^2 gilt $\alpha_r^1 < \alpha_r^2$, d. h. $\cos a_r^1 \geq \cos \alpha_r^2$ oder

$\frac{c_{r+1}}{c_r} \cdot \cos \beta \geq \frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^2$.

Folglich ist $\cos \beta_r^1 \geq \cos \beta_r^2$, d. h. $\beta_r^1 \leq \beta_r^2$.

Das bedeutet aber, daß das Streckenpaar (s_{r+1}^1, s_{r+1}^2) divergiert.

Fall B: Es ist

$$\frac{\cos \alpha_r^1}{\cos \beta_r^1} = \frac{c_{r+1}}{c_r} \quad \text{und} \quad \frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} \neq \frac{c_{r+1}}{c_r} .$$

Wie sich in Abschnitt 643 ergab, ist die funktionale Abhängigkeit des Ausdrucks

$$\left(\frac{\cos \alpha_r}{\cos \beta_r} - \frac{c_{r+1}}{c_r}\right) \tag{6–29}$$

von der Bewegung des Punktes Q_r auf beiden Seiten des durch die Gleichung

$$\frac{\cos \alpha_r}{\cos \beta_r} = \frac{c_{r+1}}{c_r}$$

definierten Minimalpunktes streng monoton. Da außerdem nach Konstruktion der Ausdruck (6–29) für $Q_r^2 = R_{r1}$ kleiner ist als für jede andere Lage von Q_r auf s_r, strebt

$$\frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} - \frac{c_{r+1}}{c_r}$$

für wachsendes α_r^2 und fallendes β_r^2 gegen Null. Das bedeutet

$$\frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} - \frac{c_{r+1}}{c_r} \geq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} \geq \frac{c_{r+1}}{c_r} .$$

Die drei wesentlichen Beziehungen noch einmal zusammengefaßt:

$$\frac{\cos \alpha_r^1}{\cos \beta_r^1} - \frac{c_{r+1}}{c_r} \;\Big|\; \cos \alpha_r^1 > \cos \alpha_r \;\Big|\; \frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} \geq \frac{c_{r+1}}{c_r} .$$

Es folgt

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^1 > \cos \alpha_r^2 \geq \frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^2 \quad \text{oder} \quad \cos \beta_r^1 > \cos \beta_r^2 \quad \text{oder} \quad \beta_r^1 < \beta_r^2 ,$$

was zu beweisen war.

Fall C: Parallel den unter Fall B angestellten Überlegungen erhält man:

$$\frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} = \frac{c_{r+1}}{c_r} \;\Big|\; \cos \alpha_r^1 > \cos \alpha_r^2 \;\Big|\; \frac{\cos \alpha_r^1}{\cos \beta_r^1} \leq \frac{c_{r+1}}{c_r} .$$

Es folgt

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^2 < \cos \alpha_r^1 < \frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^1 , \quad \text{also} \quad \cos \beta_r^2 < \cos \beta_r^1 \quad \text{oder} \quad \beta_r^1 < \beta_r^2 , \text{ q.e.d.}$$

Fall D: Die Kombination der Untersuchungen in B und C ergibt:

$$\frac{\cos \alpha_r^1}{\cos \beta_r^1} \leq \frac{c_{r+1}}{c_r} \qquad \frac{\cos \alpha_r^2}{\cos \beta_r^2} \geq \frac{c_{r+1}}{c_r}$$

Folglich ist

$\frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^1 \geq \cos \alpha_r^1 > \cos \alpha_r^2 \geq \frac{c_{r+1}}{c_r} \cos \beta_r^2$ und damit $\beta_r^1 < \beta_r^2$, womit die Beweisführung abgeschlossen ist.

Die Tatsache, daß aus der Divergenz jedes Paares (s_k^1, s_k^2) die Divergenz des daran anschließenden Paares (s_{k+1}^1, s_{k+1}^2) folgt, bedeutet: Aus $Q_k^1 \neq Q_k^2$ folgt $Q_{k+1} \neq Q_{k+1}^2$. Nehmen wir zu diesem Ergebnis noch die frühere Annahme $Q_j^1 \neq Q_j^2$ für ein gewisses $j \sim n$ hinzu, so läßt sich das Prinzip der vollständigen Induktion anwenden, die zu der Feststellung führt, daß für alle Paare (Q_i^1, Q_i^2) mit $i > j$ gilt: $Q_i^1 \neq Q_i^2$.

Da aber für spätestens $i = n + 1$

$$Q_{n+1}^1 = Q_{n+1}^2 = P_2$$

ist, liegt ein Widerspruch vor, die Annahme, daß die Menge N mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, ist also falsch. Das aber besagt für die Praxis:

Alle Streckenzüge zwischen P_1 und P_2 mit den Eckpunkten Q_k auf den Gliedern s_k, die so verlagert werden, daß sich die Verkehrskosten stetig verringern, konvergieren in genau einem ausgezeichneten Streckenzug. Er ist eindeutig gegeben durch jene Punkte Q_k, $k = 1, \ldots, n$, in welchen der Ausdruck

$$\left| \frac{\cos \varkappa_k}{\cos \beta_k} - \frac{c_{k+1}}{c_k} \right|$$

innerhalb des abgeschlossenen Definitionsbereiches s_k sein Minimum annimmt.

Damit ist nicht nur Existenz und Eindeutigkeit der gesuchten Minimallösung nachgewiesen, sondern gleichzeitig auch ein Weg aufgezeigt worden, wie diese Lösung, nämlich der ökonomisch optimale Streckenzug, praktisch konstruiert werden kann. —

65. Die Lösung des allgemeinen Problems

Die Abschnitte 62—64 hatten ein allgemeines Problem aufgeworfen, mathematisch formuliert und schließlich in eine Reihe von gleichartigen Teilproblemen zerlegt. In Abschnitt 644 wurde demonstriert, wie sich jedes dieser Teilprobleme eindeutig lösen läßt.

Wir fassen zusammen, indem wir die bisherigen Ergebnisse auf die noch einmal formulierte Situation anwenden:

Gegeben seien zwei Punkte P_1 und P_2 in der Ebene, eine zwischen ihnen bestehende Verkehrsspannung f, eine Anzahl von Grenzlinien φ_i, die das Untersuchungsgebiet in Areale F_j gleicher Baukosten c_j' aufteilen, weiter für jede Grenzlinie φ_i einen sie approximierenden Polygonzug Φ_i, der sich aus einer Kette von Strecken s_{ik} zusammensetzt. Es sei S die Menge aller solcher Polygonzugglieder s_{ik}:

$$S = \{s_{ik} \mid i = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots\}$$

und T die Menge aller Untermengen von S, deren Elemente E folgenden Kriterien genügen:

(1) E ist eine geordnete Menge.
(2) Je zwei benachbarte Grenzstrecken von E (benachbart im Sinne der Mengenordnung) begrenzen das gleiche Areal F.
(3) Zwischen benachbarten Grenzstrecken gibt es mindestens eine geradlinige Verbindung mit konstanten Baukosten.

Es ist klar, was mit den Bedingungen (1)—(3) bezweckt wird: Es werden Untermengen von S, die entweder kein Lösungspolygon im Sinne des Abschnitts 644 besitzen oder deren Lösungspolygon für die optimale Trasse von P_1 nach P_2 nicht in Frage kommt, von vornherein aus der Betrachtung ausgeschlossen. Die angeführten Kriterien sind jedoch nicht vollständig; sie sind notwendig für die Auswahl der zu untersuchenden Untermengen von S, aber nicht hinreichend. Das ist aber auch nicht erforderlich, denn wenn der Streckenzug minimaler Verkehrskosten durch ein programmgesteuertes Rechengerät festgestellt wird, so werden dabei alle irrealen Lösungen durch die Positionen ihrer Eckpunkte erkennbar. Soll er aber in konventioneller Weise mittels des hier vorgelegten Schemas berechnet werden, so wird man auf Grund der Karte nur solche Untermengen von S zur Untersuchung auswählen, deren Polygonzug minimaler Verkehrskosten tatsächlich die optimale Lösung darstellen könnte. Dadurch wird die eventuell sehr hohe Anzahl von zu berechnenden Polygonzügen und deren Verkehrskosten ganz erheblich reduziert.

66. Praktische Konstruktion der Lösung

Bei der praktischen Bearbeitung des Problems gibt es verschiedene Mittel, den Arbeitsaufwand einzuschränken. So kann man etwa zunächst sehr grobe polygonale Approximationen für die Grenzlinien gleicher Baukosten auswählen, so daß die Zahl der zu untersuchenden Möglichkeiten klein gehalten wird. Der Vergleich der verschiedenen Lösungen liefert eine erste Informa-

tion, welches die in Frage kommenden Gebiete sind. Sodann verbessert man in den kritischen Zonen — aber nur in ihnen — die Approximationen und berechnet erneut den optimalen Streckenzug. — Weiterhin wird man die Untermengen von S unter Berücksichtigung von Informationen auswählen, die man vorher aus bereits untersuchten Untermengen von S gewonnen hat. Insbesondere gilt dies für den Fall, daß man das Problem auf der Karte, also graphisch löst.

Sei E ein Element von T:

$$E = \{s_{ij} \,/\, i = e_1, e_2, \ldots;\ j = p_1, p_2 \ldots\}\,.$$

Um die Symbolik zu vereinfachen, setzen wir formal

$$e_k = k\,,\quad p_l = l\,.$$

Es sei aber ausdrücklich betont, daß E auch in der neuen Symbolik:

$$E = \{s_{ij} \,/\, i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots\}$$

nur irgendein beliebiges Element von T repräsentieren soll. — Man beginnt mit einer ersten Schätzung des gesuchten Polygonzuges, W,

$$W = \{P_1 \ldots \bar{Q}_{ij} \ldots P_2\}\,,$$

wobei $\bar{Q}_{ij}$ Eckpunkt dieses Polygons auf der Grenzstrecke s_{ij} ist, etwa der Mittelpunkt von s_{ij}. Die Punkte $\bar{Q}_{ij}$ werden nun auf den Strecken s_{ij} sukzessive so bewegt, bis sie ihre optimale Lage mit

$$\bar{Q}_{ij} = R_{ij0} \quad \text{oder} \quad \bar{Q}_{ij} = R_{ij1} \quad \text{oder} \quad \frac{\cos\bar{\alpha}_{ij}}{\cos\bar{\beta}_{ij}} = \frac{c_{i+1}}{c_i}$$

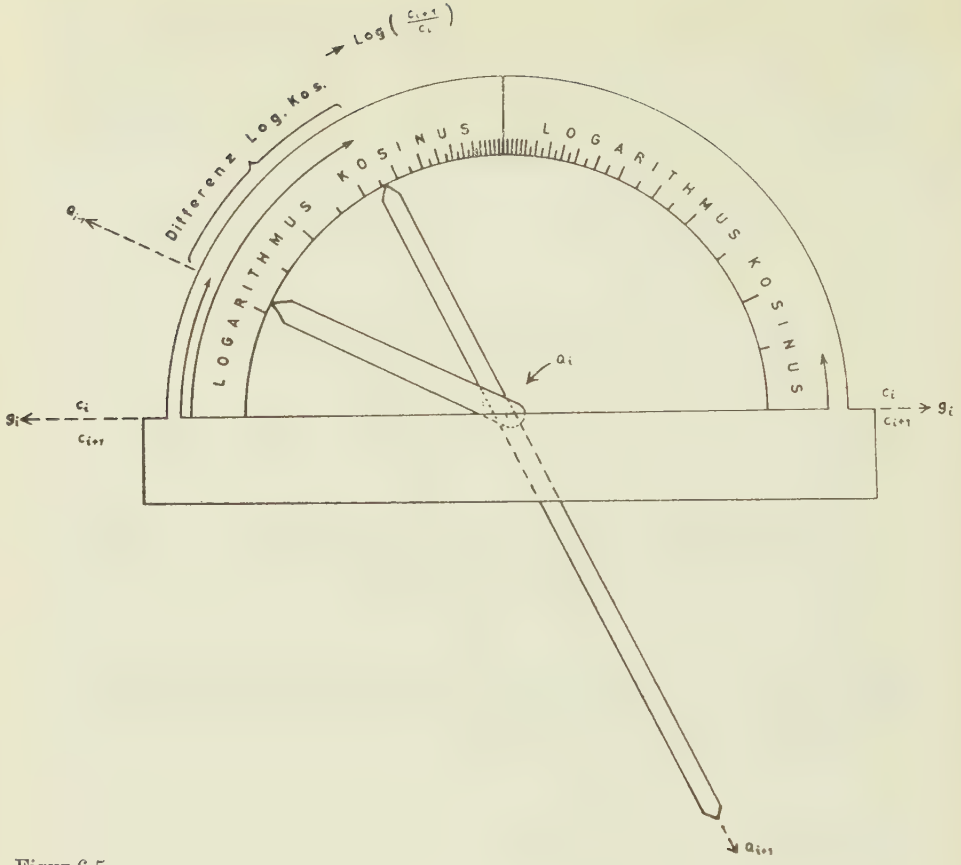
erreicht haben. Der neu gewonnene Streckenzug werde mit

$$L = \{P_1, \ldots, Q_{ij}, \ldots, P_2\}$$

bezeichnet. Sei nun etwa Q_{rl} ein Eckpunkt, der bis zu einem Endpunkt von s_{rl}, z. B. R_{rl0}, verschoben wurde, ohne aber die Gleichung

$$\frac{\cos\alpha_{re}}{\cos\beta_{re}} = \frac{c_{r+1}}{c_r}$$

durch die neue Position befriedigen zu können. Wie schon früher (Abschnitt 644) diskutiert, würde eine weitere Verschiebung von Q_{rl} über R_{rl} hinaus den Streckenzug L noch weiter verbilligen. Da s_{rl} Glied des Polygonzuges Φ_r ist, gibt es (für gewöhnlich) ein benachbartes Glied s_{rl-1} des gleichen Polygonzuges mit $R_{r,l-1,1} = R_{rl0}$.



Figur 6.5

Indem man Q_{rl} bei dem Prozeß

$$\left| \frac{\cos \alpha_{rl}}{\cos \beta_{rl}} - \frac{c_{r+1}}{c_r} \right| \rightarrow 0$$

von dem Segment s_{rl} auf das Segment $s_{r,l-1}$ übertreten läßt und dort weiter führt, hat man ein neues Element E' von T erfaßt. E' geht aus E hervor, indem man das Element s_{rl} von E durch das Element $s_{r,l-1}$ ersetzt. Alle Elemente E_i aus T, die sich in der beschriebenen Weise aus E entwickeln, scheiden bis auf das letzte aus der Untersuchung aus. Das wird einsichtig aus der Tatsache, daß sich L bei fortgesetzter Verkehrskostensenkung genau über diese Mengen E_i hinwegbewegt. —

Will man die Lösung graphisch konstruieren, indem man direkt auf der Karte arbeitet, so ist die sukzessive Einstellung der geforderten Winkelverhältnisse durch Berechnung der Lösungen des jeweiligen Polynoms 4. Grades ein ungemein mühevolles Verfahren. Auch die Bewegung der Eckpunkte des Streckenzuges über jeweils kleine Intervalle mit anschließender Kontrolle der Proportionen der Winkelkosinus ist noch sehr zeitraubend. Es empfiehlt sich deshalb, ein einfaches Instrument zu verwenden, wie es Figur 6.5 darstellt. Das Gerät mißt Ein- und Austrittswinkel gleichzeitig, und zwar gibt es nicht ihre Gradzahl, sondern die Logarithmen ihrer Kosinus an. Man liest die Differenz der beiden Logarithmen von der Skala ab und vergleicht sie mit dem — fest gegebenen — Logarithmus der geforderten Proportion der Winkelkosinus.

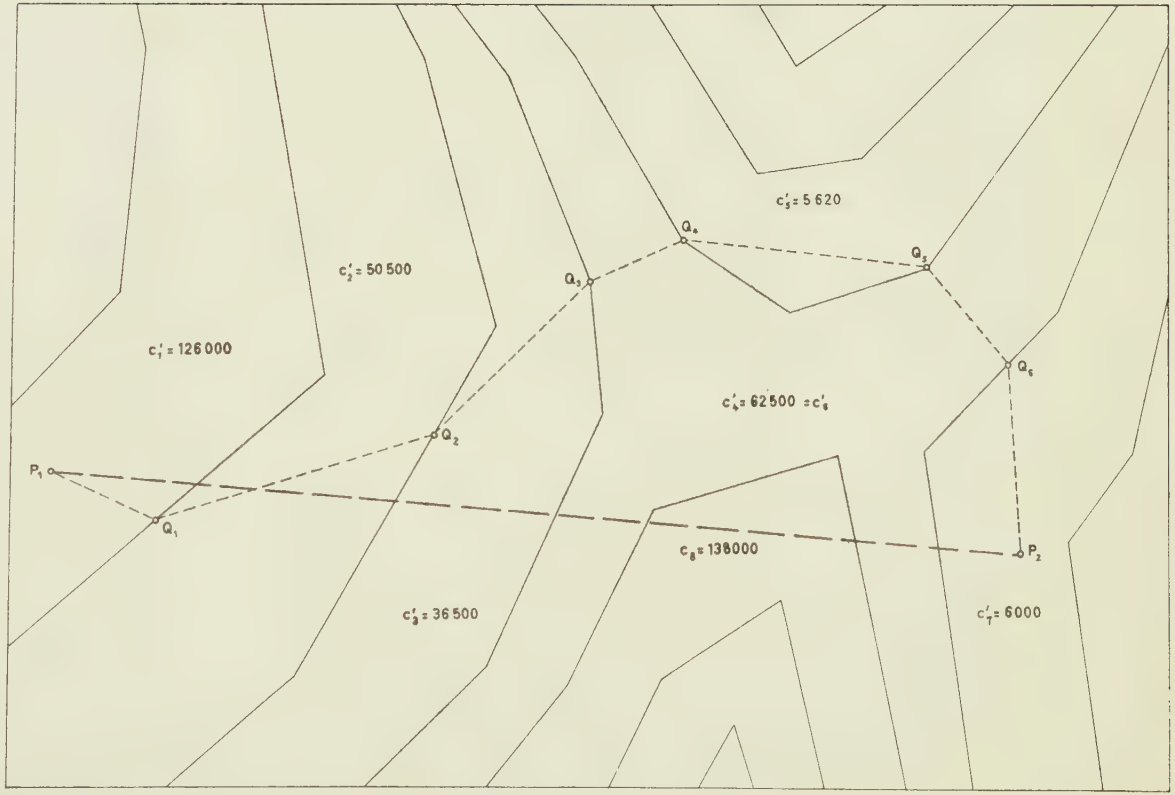
Die graphische Methode bietet noch einen anderen erheblichen Vorteil: Sind die Grenzlinien gleicher Baukosten einigermaßen generalisiert, so daß, von lokalen Ausnahmen abgesehen, ihr Verlauf verhältnismäßig „sanft" ist, so entfällt die Notwendigkeit, sie durch Polygonzüge zu approximieren, wodurch die Fehlergrenze noch weiter eingeschränkt wird. In beweistheoretischer Hinsicht bleiben die früher erzielten Aussagen in vollem Umfang bestehen, und zwar schon deshalb, weil es vom praktischen Gesichtspunkt aus gleichgültig ist, ob eine Grenzlinie mathematisch gesehen eine stetig gekrümmte Kurve oder ein Polygonzug mit relativ sehr kurzen Gliedern ist. —

Das Beispiel in Figur 6.6 zeigt das Ergebnis einer solchen Konstruktion an einem Problem, wie es in der Praxis der Planung auftreten könnte[35].

Zwei Verkehrsquellen mit einem Abstand von 19,1 Kilometern sollen durch einen Verkehrsweg verbunden werden. Der Weg soll ein jährliches Verkehrsvolumen von 100 000 Tonnen bewältigen, die Kosten pro Tonne und Kilometer betragen DM 0,06, die Baukosten variieren in dem ebenen Gelände, sie sind der Karte mit den Grenzlinien gleicher Baukosten zu entnehmen.

In die Figur wurde die wirtschaftlich optimale Trasse als kurz gerissener Streckenzug eingetragen. Die für sie jährlich anfallenden Bau- und Betriebskosten betragen 1 206 000 DM. Vergleicht man dieses Ergebnis mit den Gesamtkosten für eine geradlinige Verbindung der beiden Punkte in Höhe von DM 1 601 000, so erweist sich der Umweg trotz einer Wegverlängerung von 32,7% als die um 24,6% billigere Lösung. —

[35] Zahlen in Anlehnung an C. Pirath (1949, S. 216f.).


$c'_5 = 5\,620$
$c'_2 = 50\,500$
$c'_1 = 126\,000$
$c'_4 = 62\,500 = c'_6$
$c_8 = 138\,000$
$c'_3 = 36\,500$
$c'_7 = 6\,000$
Q_1
Q_2
Q_3
Q_4
Q_5
Q_6
P_1
P_2

Figur 6.6

Es sei bei diesem Beispiel noch einmal darauf hingewiesen, daß Begriffe, Problemstellung und Lösungsmethoden sowohl von der speziellen Art des Verkehrsmittels als auch der des Verkehrsmediums unabhängig sind. Demgemäß gelten die in den vorhergehenden wie diesem Kapitel vorgelegten Überlegungen grundsätzlich für alle Verkehrserscheinungen, deren Wirtschaftlichkeit eine Funktion ihrer Linienführung ist und über sie von den räumlich sich verändernden geographischen Gegebenheiten abhängt. –

7. ZUSAMMENFASSUNG, SCHLUSSBETRACHTUNG

Thema der vorliegenden Arbeit war die mathematische Untersuchung der verkehrsgeographischen Frage, wie ein Verkehrsnetz räumlich gestaltet werden muß, damit die durch Bau und Betrieb des Netzes entstehenden Kosten minimal sind.

Die hier vorgetragene Gesamtkostenrechnung des Verkehrs als Funktion der geometrischen Gestalt des Verkehrsnetzes geht mit Ausnahme des letzten Kapitels von einem zweidimensionalen homogenen Verkehrsraum aus. Dieser Ansatz rechtfertigt sich aus zwei Tatsachen: Zum einen wird die Linienführung vieler Verkehrsbahnen fast nur von der Lage der Verkehrsquellen diktiert und hängt von allen weiteren den Raum erfüllenden Erscheinungen und Kräften wenig oder gar nicht ab (Diskussion und Beispiele in Abschnitt 121); zum andern stellen bei allen übrigen Verkehrssituationen die Lagebeziehungen der Verkehrsquellen mindestens einen Teilaspekt für die Kostenrechnung dar. In diesem Sinne bildet ihre Untersuchung die Vorstufe zu einem umfassenderen Modell (Abschnitt 122).

Setzt man nun einen solchen ebenen homogenen Verkehrsraum voraus und nimmt die Lage der Verkehrsquellen, die Größe der Verkehrsspannungen sowie die kilometrischen Bau- und Betriebskosten als gegeben an, so gelingt es, eine Gesamtkostenrechnung aufzustellen (Abschnitte 21–23). Die mathematische Interpretation dieser Kostenrechnung führt zu dem Schluß, daß es unter dem Gesichtspunkt der Kostenminimierung gegebenenfalls zweckmäßig ist, beim Bau von Verkehrsbahnen verschiedene Verkehrsspannungen durch zum Teil gleiche Verkehrswege zu bedienen, das heißt also, verschiedene Verkehrsströme räumlich zu bündeln. Wird ein gegebenes Spannungsfeld durch den Bau eines Systems von Verkehrswegen derart bedient, daß man diesem Bündelungsprinzip Rechnung trägt, so entsteht ein nach ökonomischen Gesichtspunkten gestaltetes Verkehrsnetz. Physiognomisch wird es gekennzeichnet durch die Gabelung von Verkehrslinien, d. h. durch Knotenpunkte. Ihnen entspricht die Gliederung des Verkehrsablaufes in Konzentration, Massentransport und Dispersion der einzelnen Verkehrsströme. Funktional gesehen leistet das Verkehrsnetz die räumliche Koordination einer ungeordneten Menge von Einzelverkehrsströmen unter dem ordnenden Gesichtspunkt einer insgesamt optimalen Wirtschaftlichkeit (Abschnitte 24, 25).

Nach dieser weitgehend verbalen Aufbereitung des Themas muß nun ganz konkret gefragt werden: Wann sollen Verkehrsströme gebündelt werden, und wo sollen sie gebündelt werden, wenn man zu einem ökonomisch optimalen Ergebnis gelangen will?

Abschnitt 46 demonstriert, wie sich jedes beliebige Verkehrsnetz als ein System von (dreistrahligen) Verkehrsgabeln verstehen läßt, von denen jede den Verkehr eines Knoten- bzw. Quellpunktes zu zwei anderen Punkten im Netz vermittelt. Dieses Grundproblem der Netztheorie – drei Verkehrsquellen mit zwei Verkehrsspannungen – wird in Abschnitt 42 gelöst. Seine einfachsten Kombinationen führen zu vier Punkten mit zwei Verkehrsspannungen bzw. drei Punkten mit drei Verkehrsspannungen. Diese beiden Situationen erfahren in den Abschnitten 43 und 44 eine vollständige Lösung.

Allgemein vollzieht sich der Lösungsprozeß von derartigen Netzproblemen gemäß den beiden oben genannten Fragen in zwei Schritten: Zunächst ist der geometrische „Charakter" des wirtschaftlich optimalen Netzes, d. h. der Netztyp, zu bestimmen. Er gibt an, wieviel Knotenpunkte das Netz haben soll und mit welchen Verkehrsquellen bzw. anderen Knotenpunkten jeder einzelne von ihnen in Verbindung steht. Das bedeutet: Der Netztyp entscheidet darüber, welche Verkehrsströme gebündelt werden sollen.

Im weiteren Rechenprozeß werden dann Lage der Knotenpunkte und damit Lage der einzelnen Netzglieder genau lokalisiert. Von relativ einfachen Situationen abgesehen läßt sich bei Netzproblemen mit mehreren Verkehrsquellen und -spannungen die Frage nach dem optimalen Netztyp nicht mehr eindeutig beantworten, es müssen dann verschiedene Netzgestalten hinsichtlich ihrer Gesamtkosten miteinander verglichen werden (Abschnitt 45).

Die Frage, wie ein bestehendes Netz erweitert werden soll, wenn eine neue Verkehrsspannung zu befriedigen ist, findet ihre Beantwortung in Kapitel 5. Es zeigt sich erwartungsgemäß, daß die Kostenrechnung den neuen Verkehrsstrom um so mehr auf die schon bestehenden Netzglieder verweist, je geringer sein Volumen ist, und zwar in dem Maße, in welchem die dabei notwendigen Umwege immer noch kostengünstiger sind als der Neubau von Netzgliedern zwecks Einsparung von Umwegen. Im einzelnen bestimmt der Rechenprozeß jene Punkte auf den Strecken des bestehenden Netzes, in welchen die neu zu bauenden Netzglieder in die bereits bestehenden einmünden sollen. Auch bei diesem Verkehrsproblem können mehrere Lösungen auftreten, deren jeweilige Gesamtkosten dann zu vergleichen sind, um die optimale Linienführung zu finden.

Die bisherige Voraussetzung der Homogenität des Verkehrsraumes wird in Kapitel 6 aufgegeben. Zwar untersucht es nur die Frage, welche Linienführung zwischen zwei zu verbindenden Verkehrsquellen die kostengünstigste ist, so daß hier kein eigentliches Netzproblem behandelt wird; insofern sich aber jedes

Verkehrsnetz aus einzelnen Verkehrslinien zusammensetzt, kommt ihm in der Kombination mit den beiden vorhergehenden Kapiteln (4 und 5) erhebliche netztheoretische Bedeutung zu. – Die Lösung des Problems gelingt, indem der Verkehrsraum, in welchem die beiden Verkehrsquellen liegen, in baukostenmäßig homogene Areale zerlegt wird. Durch diese Areale selbst wird die Trasse gradlinig geführt, an ihren Grenzen dagegen tritt das bereits von Stackelberg (1938) aufgestellte „Brechungsgesetz des Verkehrs" in Kraft. Im einzelnen bestimmt der Rechenprozeß jene Punkte auf den Arealgrenzen, in welchen die Trasse diese Grenzen überschreiten muß, soll sie ökonomisch optimal geführt werden. Wiederum ist die Lösung im allgemeinen mehrdeutig, so daß durch Kostenvergleich entschieden werden muß, welche Trasse die günstigste ist.

Schlußbetrachtung

Vergleicht man die Voraussetzungen der vorliegenden Arbeit mit den Untersuchungen, wie sie in der verkehrswissenschaftlichen Fachliteratur angestellt werden, so wird sofort klar, wie verhältnismäßig „grobkörnig" die Struktur des vorgeführten Modells noch ist. Zahlreiche Phänomene, die zwar nicht immer, aber doch häufig in Erscheinung treten und dann auf die Wirtschaftlichkeit von Verkehrsnetzen Einfluß nehmen, sind unberücksichtigt geblieben. Dazu zählen so unterschiedliche Faktoren wie etwa Reliefenergie oder Änderung des Verkehrsvolumens als Funktion der Zeit. Dementsprechend sind die Ergebnisse der Arbeit nur in beschränktem Umfang in der Praxis anwendbar. Das kann jedoch nicht überraschen, denn an eine allgemeine und einigermaßen vollständige Kostenrechnung für Verkehrsnetze ist vorläufig noch nicht zu denken. Es wird sich deshalb jede in diese Richtung strebende Arbeit auf den Versuch beschränken müssen, aufbauend auf bereits publizierten Arbeiten dem Ziel um einige Schritte näher zu kommen. Dies aber hofft die vorliegende Arbeit geleistet zu haben.

Ist es einerseits im Rahmen der Verkehrsgeographie gelungen, die von J. E. Kohl 1841 begonnene und von zahlreichen anderen Autoren fortentwickelte Netztheorie weiter auszubauen, so scheint – gleichsam als Nebenprodukt – ein zusätzlicher Nachweis für Schlüters Behauptung erbracht worden zu sein, daß der Raum „an sich" und seine Gesetze für die Geographie insgesamt von außerordentlicher Bedeutung sind. Die Theorie der Verkehrsnetze entwickelt sich damit zu einem besonders schönen Beispiel, wie die geometrischen Prinzipien des „reinen Raumes" mit der geistigen und dinglichen Erfüllung des geographischen Raumes in der Gestaltung der Kulturlandschaft zusammenwirken.

8. SUMMARY

(1) Introduction

The topic of this paper is the mathematical investigation of a special question of transportation geography: What is the geometrical design of a transportation network, if the construction costs of the network and the costs of its traffic flow are to be minimized.

With exception of the sixth chapter the calculation of the total costs as a function of the geometrical design of the network is based on the assumption of a two-dimensional homogeneous transportation space. This assumption is justified by two facts:

a. The spacial lay-out of many transportation routes is essentially dictated by the location of the transportation sources (sinks) and is nearly or totally independent from all the other phenomena within this space (discussion and examples in section 121).

b. In all the other transportation problems the locations of transportation sources (sinks) play at least an important part within the total cost calculation. In this sense the investigation can be considered as a first step to a more complex and realistic model (section 122).

(2) Transportation as an economical problem

If we assume a two-dimensional homogeneous transportation space, the locations of sources (sinks), the transportation demand and the costs per unit route construction and traffic flow to be given it is possible to develop a total cost calculation (sections 21–23). The mathematical interpretation of this cost function leads to the conclusion, that with respect to the minimization of the costs it can be worthwhile to supply spacially different transportation demands with – at least partially – the same transportation routes, i. e. to bundle spacially different traffic flows. If with regard to this principal of bundling a system of transportation routes is constructed we obtain an economically optimal network. Physiognomically it is characterized by the branching of transportation routes, i. e. by nodes. To this physiognomy corresponds the organization of transportation into concentration, mass-transport and dispersion of the individual flows. Functionally the network provides the spacial coordination of an unarranged set of single flows under the guiding aspect of an economically optimal efficiency.

(3) On the history of the theory of transportation networks
(4) The design of transportation networks within the homogeneous space

After the foregoing mainly verbal treatment of our topic we now have to ask quite concretely: Under which circumstances flows should be bundled, and where, at what location, do they have to be bundled, if we strive for an economically optimal result. Section 46 demonstrates how every network can be understood as a system of nodes with three radiating branches, where every node bundles exactly two single flows into one (or splits one flow into two). This basic problem of the theory of networks: to find the optimal network solution for two different transportation demands between three different points, (which is a node with three branches, one of which eventually with zero length) is solved completely in section 43 and 44.

In general the process solving those problems consists out of two steps: First the "geometrical character" of the economically optimal network, i. e. the type of the net, has to be determined. It specifies how many nodes the network has to have and with which other nodes our sources (sinks) each single node has to be linked by branches. In other words: The type of the net decides which flows will be bundled. – As a second step the locations of the nodes (and consequently the positions of the branches) are computed. With exception of relatively simple situations the question for the optimal type in network problems with several sources (sinks) and several transportation demands cannot be answered unequivocally. In this case a number of different net types have to be compared with respect to their total costs (section 45).

(5) Expansion of transportation networks within the homogeneous space

This chapter answers the question, how a given network should be expanded, if a new transport demand has to be satisfied. As one has to expect the minimization of the cost function demands, that the new flow has to take already existent branches so much the more, the smaller its volume is. In the process of calculation the optimal solution follows from the evaluation of two countercurrent costs: the costs of eventually necessary roundabout ways the new flow has to take, and the costs of the construction of new branches for to reduce the necessary roundabout ways of the new flow. In detail the computation determines the points of the existent branches in which new branches should be linked with the given network. Again one may get several (relative) solutions which have to be compared with respect to their total costs to obtain the optimal solution.

(6) The location of transportation routes in the geographical plain

The previous assumption of the homogeneity of the transportation space is dropped in chapter six. It investigates only the question of the optimal location of a transportation route between two given points, which in fact is not a net-

work problem. However, taking into consideration, that each network is a system of single transportation routes (branches), the combination of this chapter with the two foregoing chapters is of considerable importance for the theory of networks in general.

Procedure of solution: The transportation space between the two given points is subdivided into areas of constant construction costs per unit transportation route. Within these areas the course of the route is straight, at their boundaries however the route changes its direction according to the refraction law of transportation set up by von Stackelberg (1938). In detail, the calculation determines the points in which the boundaries of the constant cost areas have to be crossed by the transportation route, if its design is to be economically optimal. Again the result is multiple and the final solution obtained by comparing the costs of a set of relative solutions.

9. LITERATURVERZEICHNIS

Beckmann, M., 1952: A Continuous Model of Transportation (Econometrica, Vol. 20, 643—660).

— 1960: Principles of Optimum Location for a Transportation Network (Paper presented at the NAS-NRC Symposium on Quantitative Problems in Geography).

Beckmann, M., McGuire, C. B., Winston, B. C., 1959: Studies in the Economics of Transportation. New Haven.

Blum, O., 1921: Der Weltverkehr und seine Technik im 20. Jahrhundert. Stuttgart und Berlin.

— 1936: Verkehrsgeographie. Berlin.

— 1938: Grundtatsachen zur Verkehrsgeographie (Comptes Rendus du Congrès International de Géographie, Amsterdam. Section III b, 71—82).

— 1946: Eisenbahnbau. Heidelberg.

Bronstein, I. N., und Semendjajew, K. A.: 1958: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig.

Bunge, W., 1962: Theoretical Geography (= Lund Studies in Geography, No. 1). Lund.

Christaller, W., 1952: Die Parallelität der Systeme des Verkehrs und der zentralen Orte dargestellt am Beispiel der Schweiz (Verhandlungen des Deutschen Geographentages, Bd. 28, 159—163). Remagen.

Dove, K., 1910: Ziele und Aufgaben der Verkehrsgeographie (Peterm. Mitt., I. Halbband, 1—5).

— 1921: Allgemeine Verkehrsgeographie (Smlg. Göschen, Bd. 834). Berlin.

Durgeloh, H., 1959: Die Wegekosten des Straßenverkehrs (Verkehrswiss. Veröffentlichungen des Ministeriums für Wirtschaft und Verkehr, Heft 45, Düsseldorf).

Flörke, F., 1937: Wechselwirkungen und Verkehrsforderungen von eigenwirtschaftlichen Gesichtspunkten bei der Netzgestaltung von Autobahnen (Verkehrstechnische Woche, Heft 10).

Fochler-Hauke, G., 1957: Verkehrsgeographie (Das Geographische Seminar). Braunschweig.

Friedrich, P., 1956: Die Variationsrechnung als Planungsverfahren der Stadt- und Landesplanung (= Veröffentlichungen der Akademie für Raumforschung und Landesplanung, Bd. 32). Bremen-Horn.

— 1947: Grundzüge einer Verkehrsnetzgestaltung vom Gesichtspunkt der geringsten Aufwendungen (Bauplanung und Bautechnik Nr. 5).

Fulkerson, D. R., and *Ford, L. R.*, 1962: Flows in Networks. Princeton.

Garrison, W. L., 1959: Spatial Structure of the Economy: I (Ann. of the Ass. of Amer. Geographers, Vol. 49, No. 2, 232—239).

— 1959: Spatial Structure of the Economy: II (Ann. of the Ass. of Amer. Geographers, Vol. 49, No. 4, 471—482).

— 1960: Spatial Structure of the Economy: III (Ann. of the Ass. of Amer. Geographers, Vol. 50, No. 3, 357—373).

— 1960: Connectivity of the Interstate Highway System (Papers and Proceedings of the Regional Science Association, Vol. 6, 121—138).

Götz, W., 1888: Die Verkehrswege im Dienste des Welthandels. Stuttgart.
Hassert, K., 1931: Allgemeine Verkehrsgeographie (2 Bde., 2. Aufl.). Berlin und Leipzig.
Hassinger, H., 1933: Verkehrsgeographie (In: *Klute, F.*, [Herausgeber]: Handbuch der geographischen Wissenschaft, Band 2, S. 457—478). Potsdam.
Hasenkamp, G., 1925: Die Wege als Erscheinungen im Landschaftsbild (Diss.). Freiburg.
Haufe, H., 1931: Die geographische Struktur des deutschen Eisenbahnverkehrs (Veröffentlichungen des Geographischen Seminars der Universität Leipzig, Heft 2). Berlin — Leipzig.
Hettner, A., 1897: Der gegenwärtige Stand der Verkehrsgeographie (Geogr. Zeitschr., 3. Jahrg., S. 623—634, 694—704).
— 1927: Die Geographie. Ihre Geschichte, ihr Wesen und ihre Methoden. Breslau.
— 1952: Verkehrsgeographie (= Band 3 in: Hettner: Allgemeine Geographie des Menschen). Stuttgart.
Hoffmann, R., 1961: Die Gestaltung der Verkehrswegenetze (Veröffentlichungen der Akademie für Raumforschung und Landesplanung, Abhandlungen Band 39). Hannover.
Kavimann, W., 1928: Über eine Minimalaufgabe der Verkehrstechnik (Der Bauingenieur, Heft 31, S. 558 ff.).
Keller, E., 1929: Die verkehrsgeographischen Grundlagen der deutschen Eisenbahnumwege (Archiv für Eisenbahnwesen).
Knödel, W., 1960: Verkehrsplanung und Mathematik III. Netzmodelle (Math. Techn. Wirtschaft, Band 7, 147—154).
Kohl, J. E., 1841: Der Verkehr und die Ansiedelung der Menschen in ihrer Abhängigkeit von der Gestaltung der Erdoberfläche. Dresden und Leipzig.
Korte, J. W., 1958: Grundlagen der Straßenverkehrsplanung in Stadt und Land. Wiesbaden — Berlin.
Krüger, K., 1949: Straßen der Erde. Berlin — Bielefeld.
Launhardt, W., 1887/88: Theorie des Trassierens (2 Bände). Hannover.
Levsen, P., und *Peters, G.*, 1912: Der angemessene Preis im handwerklichen und industriellen Straßenbau. Darmstadt.
Lösch, A., 1944: Die räumliche Ordnung der Wirtschaft (Zweite Aufl.). Jena.
Kalaba, R. E., and *Juncosa, M. L.*, 1956: Optimal Design and Utilization of Communication Networks (Management Science, Vol. 3, S. 33—44).
Miehle, W., 1958: Link-Length Minimization in Networks (Journal of the Op. Res. Soc. of America, Vol. 6, 232—243).
Mikolajski, J., 1957: Die Entwicklung der Verkehrsgeographie in Mitteleuropa (Zeitschrift für Wirtschaftsgeographie, Jahrgang I, S. 137—145).
Napp-Zinn, A. F., 1938: Bemerkungen zur verkehrsgeographischen und verkehrswissenschaftlichen Methodik der Betrachtung von Quantität und Qualität von Verkehrsvorgängen (Comptes Rendus du Congrès International de Géographie, Amsterdam, Section IIb, 106—112).
Obst, E., 1959: Allgemeine Wirtschafts- und Verkehrsgeographie. Berlin.
Otremba, E., 1957: Allgemeine Geographie des Welthandels und des Weltverkehrs. Stuttgart.
Pirath, C., 1949: Die Grundlagen der Verkehrswirtschaft (2. Aufl.). Berlin Göttingen Heidelberg.

Prager, W., 1961: On the Design of Communication and Transportation Networks (Proceedings of the Symposium on the Theory of Traffic Flow, ed. by R. Herman). Amsterdam.

Predöhl, A., 1958: Verkehrspolitik (Grundriß der Sozialwissenschaft, Band 15, hrsg. von R. Schaeder). Göttingen.

Quandt, R. E., 1960: Models of Transportation and Optimal Network Construction (Journal of Regional Science, Vol. 2, No. 1, S. 27—45).

Ratzel, F., 1903: Die geographischen Bedingungen und Gesetze des Verkehrs und der Seestrategik (G. Z., 9. Jahrgang, S. 489—513).

— 1912: Anthropogeographie, II. Teil: Die geographische Verbreitung des Menschen. Stuttgart.

— 1923: Politische Geographie (3. Aufl.). München und Berlin.

Richthofen, F., 1912: Chinas Binnenverkehr in seinen Beziehungen zur Natur des Landes (Mitt. des F. v. Richthofen-Tages). Berlin.

— 1908: Vorlesungen über allgemeine Siedlungs- und Verkehrsgeographie (hrsg. von O. Schlüter). Berlin.

Schlüter, O., 1930: Über die Aufgaben der Verkehrsgeographie im Rahmen der „Reinen Geographie" (H. Wagner-Gedächtnisschrift, 298—309).

Siddall, W., 1964: Transportation Geography. A Bibliography. Manhattan/Kansas/USA.

Stackelberg, H. v., 1938: Das Brechungsgesetz des Verkehrs (Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 148, S. 680—694).

LEBENSLAUF

Als Sohn des kaufmännischen Angestellten Wilhelm Werner und seiner Frau Gisela, geb. von Schütz, wurde ich am 31. Juli 1935 in Hamburg geboren. Während der Zeit von 1942 bis 1946 besuchte ich die Volksschule in Iphofen/Mittelfranken, im Anschluß daran das Staatliche Gymnasium in Coesfeld/Westfalen, wo ich im Frühjahr 1955 das Abitur ablegte.

Vom Sommersemester 1955 an studierte ich an den Universitäten von Münster, Graz, Wien und Würzburg, dann, mit Beginn des Wintersemesters 1957/58, an der Freien Universität Berlin. Studienfächer waren Mathematik und Geographie, seit 1957 auch noch Philosophie. Die Staatsexamina in den ersten beiden Fächern absolvierte ich im November 1960, das philosophische Staatsexamen im November 1961.

Im Februar 1961 nahm mich Professor Dr. Dr. J. H. Schultze am 1. Geographischen Institut der FU als Doktorand an. Zur Vorbereitung der Dissertation reiste ich Anfang 1962 in die Vereinigten Staaten. Dort studierte ich während des akademischen Jahres 1962/63 an der Northwestern University, Evanston/Chicago, Quantitative Geography, anschließend arbeitete ich als Wissenschaftlicher Assistent am Transportation Center der gleichen Universität. Ende des Jahre 1963 kehrte ich an die Freie Universität Berlin zurück und widmete mich seitdem der Fertigstellung meiner Dissertation.

Meine akademischen Lehrer waren in Münster die Herren Professoren Behnke, Eichler (Mathematik) und Kappler, in Graz die Professoren Wendelin, Hohenberg (Math.) und Schlenger (Geographie), in Wien die Professoren Hlawka, Hofreiter (Math.) und Bobek (Geogr.), in Würzburg die Professoren Büdel, Flohn (Geogr.) und Berlinger (Philosophie), in Berlin die Professoren Schultze, Hövermann, Fels, Wöhlke (Geogr.), Grotemeyer, Dinghas, Ostmann, Stöhr (Math.) und Frau Professor Kanthack (Philosophie), sowie in Evanston die Professoren Garrison, Taaffe, Marble und Moses (Quantitative Geography).

Berlin, im Frühjahr 1965

Christian Werner

Abhandlungen des Geographischen Instituts der Freien Universität Berlin

Bisher sind erschienen:

Band 1: K. Schröder, Die Stauanlagen der mittleren Vereinigten Staaten. Ein Beitrag zur Wirtschafts- und Kulturgeographie der USA. 1953. 96 S. mit 4 Karten, DM 12,—

Band 2: O. Quelle, Portugiesische Manuskriptatlanten. 1953. 12 S. mit 25 Tafeln und 1 Kartenskizze. Vergriffen!

Band 3: G. Jensch, Das ländliche Jahr in deutschen Agrarlandschaften. 1957. 115 S. mit 13 Figuren und Diagrammen, DM 19,50

Band 4: H. Valentin, Glazialmorphologische Untersuchungen in Ostengland. Ein Beitrag zum Problem der letzten Vereisung im Nordseeraum. 1957. 86 S. mit Bildern und Karten, DM 20,—

Band 5: Geomorphologische Abhandlungen. Otto Maull zum 70. Geburtstage gewidmet. Besorgt von E. Fels, H. Overbeck und J. H. Schultze. 1957. 72 S. mit Abbildungen und Karten, DM 16,—

Band 6: K.-A. Boesler, Die städtischen Funktionen. Ein Beitrag zur allgemeinen Stadtgeographie aufgrund empirischer Untersuchungen in Thüringen. 1960. 80 S. mit Tabellen und Karten, DM 20,—

Seit 1963 wird die Reihe fortgesetzt unter dem Titel

Abhandlungen des 1. Geographischen Instituts der Freien Universität Berlin

Band 7: J. H. Schultze, Der Ost-Sudan. Entwicklungsland zwischen Wüste und Regenwald. 1963. 173 S. mit Figuren, Karten und Abbildungen, DM 25,—

Band 8: H. Hecklau, Die Gliederung der Kulturlandschaft im Gebiet von Schriesheim/Bergstraße. Ein Beitrag zur Methodik der Kulturlandschaftsforschung. 1964. 152 S. mit 16 Abbildungen und 1 Karte, DM 30,—

Band 9: E. Müller, Berlin-Zehlendorf. Versuch einer Kulturlandschaftsgliederung. 1966. 144 S. mit 8 Abbildungen und 3 Karten, DM 30,—, im Druck

Die Reihe wird fortgesetzt

DIETRICH REIMER VERLAG IN BERLIN